2. Eine kurze Geschichte der Physik

Mathematischer Anhang

Die elementaren Begriffe der klassischen Mechanik

Ein Körper bewegt sich, wenn er zu einem späteren Zeitpunkt eine andere Position im Raum einnimmt. Ist der Abstand der beiden Raumpunkte *?x* und die verstrichene Zeit *?t*, so erfasst man die Bewegung des Körpers durch die Geschwindigkeit

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{zurückgeleger Weg}}{\text{Zeit}} \quad \text{oder} \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{2-1}$$

Praktisch muss man zur Geschwindigkeitsmessung immer mindestens zweimal zu zwei verschiedenen Zeiten die Position des Körpers feststellen. Mit Hilfe der Infinitesimalrechung (Anhang) konnte Newton bei seinen Berechnungen diesen räumlichen und zeitlichen Abstand *?x* und *?t* unendlich klein machen und konnte so die Bewegung durch Differentialgleichungen beschreiben. Man schreibt

$$v \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}, \tag{2-2}$$

wobei mit *lim* gemeint ist, dass die Zeitdifferenz *?t* zwischen zwei Ortsmessungen eben unendlich klein sein soll, und mit *dx* und *dt* sollen eben unendlich kleine Zahlen gekennzeichnet werden. Die ersten beiden Axiome können dann als Newton'schen Bewegungsgleichung der Klassischen Mechanik quantifiziert werden:

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Änderung der Geschwindigkeit}}{\text{Zeit}} = \text{proportional zur Kraf} \quad . \tag{2-3}$$

$$\text{oder} \quad \frac{dv}{dt} \propto F$$

Sie sagt aus, dass links die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit proportional zur Kraft ist. Das bedeutet auch, dass sich die Geschwindigkeit nicht ändert, also gleichförmig und geradlinig ist, wenn keine Kräfte wirken.

In (2-3) kann nun als Proportionalitätskonstante die Masse *m* des Körpers eingeführt werden:

$$m\frac{dv}{dt} \equiv F\ . \tag{2-4}$$

Es bietet sich ferner an, Geschwindigkeit und Masse zum

$$\text{Impuls } p \equiv mv \tag{2-5}$$

des Körpers zusammenzufassen. Ein Körper hat umso mehr Impuls, je größer seine Geschwindigkeit und Masse sind.

Energie *E* wird über mechanisch über die Arbeit *A* definiert, also über die Kraft *F*, die an einem Körper über einen bestimmten Weg geleistet wird:

$$\text{Energie = Arbeit = Kraft entlang eines Weges} \tag{2-6}$$

$$\text{oder} \qquad E \equiv A \equiv \int_{\text{Weg}} F dx \quad .$$

Die Begriffe Energie und Impuls werden im Begriff der Wirkung *S* zusammengefasst. Ein Impuls *p* wirkt über eine bestimmte (infinitesimale) Strecke *dx* und eine Energie *E* wirkt über eine bestimmte (infinitesimale) Zeit *dt:*

$$dS = pdx - Edt \tag{2-7}$$

Das '-'Zeichen ist reine Konvention und führt später auf positive Werte für die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_S von Wirkungen

Der Freier Fall als Beispiel der Infinitesimalrechnung

Beim freien Fall ist die Beschleunigung konstant *g* und die Geschwindigkeit *v* nimmt linear mit der Zeit zu. Der Zusammenhang der Geschwindigkeit *v* mit der Zeit *t* ist die bekannte Formel der gleichförmigen Beschleunigung, oder auch den freien Fall in einem homogenen Schwerefeld

$$v(t) = gt \, . \tag{2-8}$$

Man kann nun zunächst näherungsweise berechnen, wie weit ein frei fallendes Objekt in einer gewissen Zeit *T* kommt. Man unterteilt dazu die Zeit *T* in *N* gleiche Zeitabschnitte der Länge

$$d = \frac{T}{N} \tag{2-9}$$

und kennzeichnet die Zeitabschnitte durch

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 \\ t_n &= nd \quad . \\ t_N &= Nd = T \end{aligned} \tag{2-10}$$

Zu bemerken ist, dass

$$d = t_n - t_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_N \tag{2-11}$$

ist.

Wie bei der Kennzeichnung der einzelnen Zeiten in (2-9) geht man auch für die Geschwindigkeit und den zurückgelegten Weg des fallenden Objekts vor:

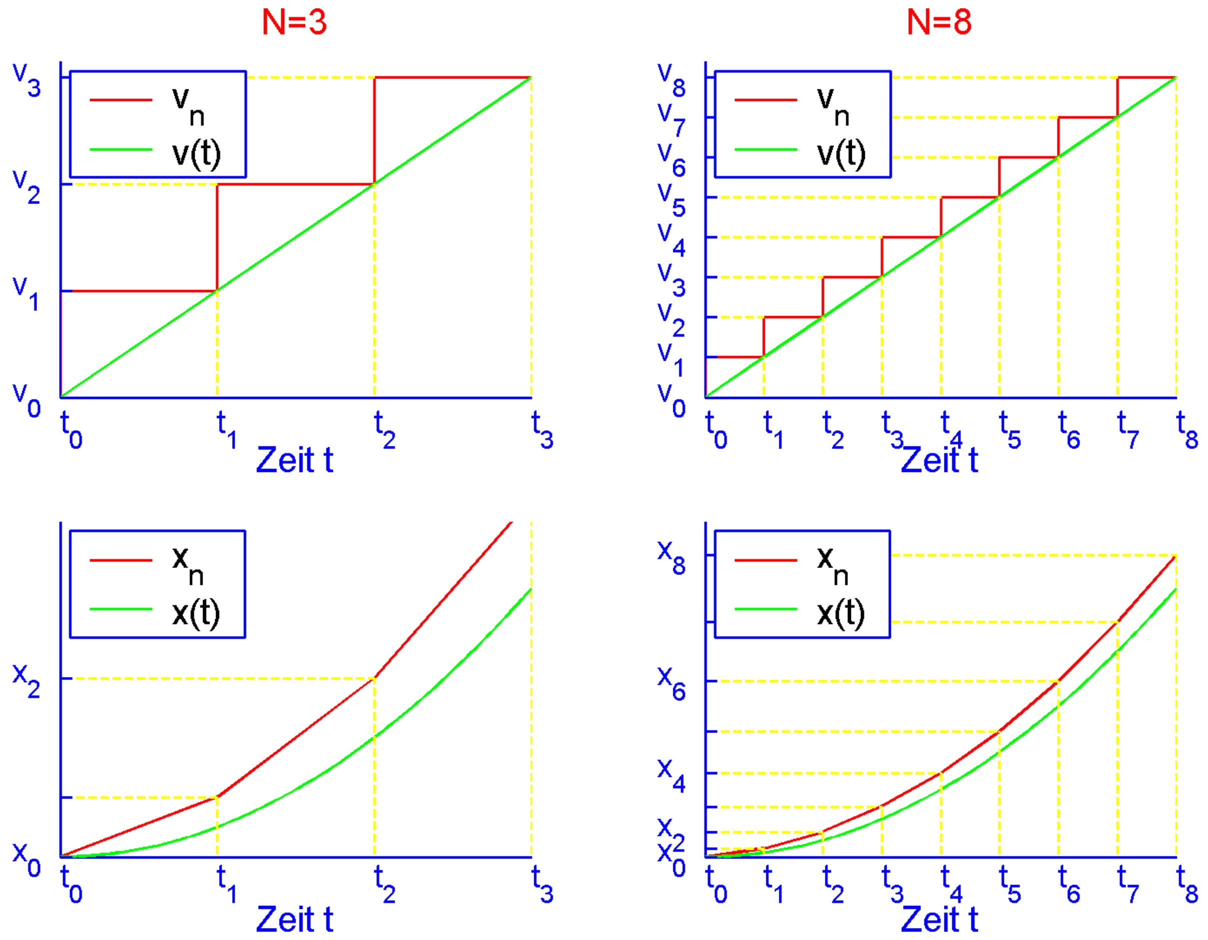
$$\begin{aligned} v_0 &\equiv 0, & x_0 &\equiv 0, \\ v_n &\equiv v(t_n) = gt_n, & x_n &\equiv x(t_n),. \\ v_N &\equiv v(t_N) = gT, & x_N &\equiv x(T). \end{aligned} \qquad (2\text{-}12)$$

Es gilt nun, den zurückgelegten Weg x_n zu berechnen.

Dazu nimmt an zunächst näherungsweise an, dass die Geschwindigkeit innerhalb der Zeitabschnitte *d* gleich bleibt. Man rechnet:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ x_1 &\simeq v_1 t_1 = g\underbrace{(t_1 - t_0)}_{\equiv d} t_1 = gd\,t_1 \\ x_2 &\simeq x_1 + v_2 t_2 = gd\,t_1 + gd\,t_2 \\ x_3 &\simeq x_2 + v_3 t_3 = gd\,t_1 + g\,dt_2 + g\,dt_3 = gd\,(t_1 + t_2 + t_3) = gd\,(1+2+3)d \\ &\vdots \\ x_N &\simeq gd^2\{1+2+3+4+\ldots+(N-3)+(N-2)+(N-1)+N\} \\ &= gd^2\left\{\underbrace{\underbrace{1+(N)}_{=N+1}+\underbrace{2+(N-1)}_{=N+1}+\underbrace{3+(N-2)}_{=N+1}+\ldots}_{\text{inst. } N/2 \text{ mal}}\right\} \\ &= gd^2(N+1)\frac{N}{2} \\ &= gd^2\left(\frac{T}{d}+1\right)\frac{T}{2d} = g(T+d)\frac{T}{2} \end{aligned} \qquad (2\text{-}13)$$

Das Ergebnis hängt davon ab, wie viele Zeitabschnitte man wählt. Man sieht dies deutlich an den zwei Beispielen in Abbildung 2-1 für *N=3* und *N=8*. Die Stufen sind die entsprechenden Näherungen. Die durchgezogenen Kurven beschreiben das als korrekt geltende Verhalten, und das bestimmt man durch einen Trick.



Geschwindigkeiten v_i und Orte x_i zu bestimmten Zeiten t_i. Links wurde die Gesamtzeit der Bewegung T in 3 Abschnitte unterteilt. In jedem einzelnen Abschnitt ist die Geschwindigkeit konstant. Die obere der beiden Kurven gilt für diese Näherung, während jeweils die untere der beiden Kurven dem Ergebnis der Newton'schen Infinitesimalrechnung entspricht.

In den beiden Diagrammen auf der rechten Seite ist dasselbe nochmals zu sehen, nun ist die Bewegungszeit T jedoch in 8 Abschnitte aufgeteilt. Man sieht, dass der Unterschied zum Newton'schen Ergebnis viel kleiner ist als bei einer Unterteilung in 3 Abschnitte.

Abbildung 2-1

Was man praktisch nicht machen kann, kann man doch mathematisch durchführen. Man unterteilt den Zeitabschnitt $t=0 \ldots T$ in unendlich viele Abschnitte d, die dann natürlich unendlich klein, also infinitesimal, werden. Damit erhält man das eindeutige und als korrekt geltende Fallgesetz

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{2} g t^2 . \qquad (2\text{-}14)$$

Dieses Gesetz hat jeder Oberstufenschüler in seinem Leben einmal auswendig gelernt.