4. Das Wunder des Punktes

Mathematischer Anhang

Euklids Beweis, dass die Wurzel von 2 irrational ist

Die Beweisführung verläuft nach Euklid durch Widerspruch. Man nimmt an, dass die Wurzel aus 2 rational ist und zeigt, dass diese auf einen Widerspruch führt.

Annahme: Es existieren zwei natürliche Zahlen *p* und *q*, deren Verhältnis mit sich selbst multipliziert 2 ergibt

$$\exists p, q \in \mathbb{N}: \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = 2. \tag{4-1}$$

Daraus folgt, dass das Quadrat von *p* gerade sein muss:

$$p^2 = 2q^2 \in 2\mathbb{N}\,. \tag{4-2}$$

Wenn das Quadrat von *p* gerade ist, muss auch *p* selber gerade sein. Daher lässt sich *p* durch die natürliche Zahl *m* ausdrücken:

$$p = 2m, \quad m \in \mathbb{N}\,, \tag{4-3}$$

also

$$p^2 = 4m^2 = 2q^2\,. \tag{4-4}$$

Daraus folgt nun

$$q^2 = 2m^2 \in 2\mathbb{N}\,, \tag{4-5}$$

so dass also auch *q* eine gerade Zahl sein muss und sich durch *n* ausdrücken läss.

$$q = 2n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4-6}$$

Damit ist die Wurzel von zwei darstellbar als

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n}. \tag{4-7}$$

Wir konnten also den Bruch *p/q* mit 2 kürzen.

Nun ist es so, dass man mit der gleichen Prozedur dann auch den Bruch *m/n* kürzen kann, und dass immer wieder. Das ist natürlich absurd und bedeutet, dass es den gesuchten Bruch *p/q* nicht geben kann.

Analytisches Beispiel für den Quanten-Zenon-Effekt

Wir betrachten ein relativ einfaches Quantensystem mit zwei Energie-Eigenzuständen

$$|\psi_i\rangle: \quad \mathbf{H}|\psi_i\rangle = E_i|\psi_i\rangle, \quad i \in \{1,2\}. \tag{4-8}$$

Eine Observable **A** soll Eigenfunktionen mit Eigenwerten $A_\pm = \pm 1$ haben:

$$|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\psi_1\rangle \pm |\psi_2\rangle\right\}, \quad \mathbf{A}|\psi_\pm\rangle = \pm|\psi_\pm\rangle. \tag{4-9}$$

Am Beginn des Experiments wird das Quantensystem im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle \tag{4-10}$$

präpariert. Anschließend wird zu den Zeiten

$$t_n = n\tau, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4-11}$$

die Größe *A* gemessen.

Zunächst berechnen wir die zeitliche Entwicklung der Eigenfunktionen von **A**, $|\psi_\pm(t)\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle_\pm = \mathbf{U}(t)|\psi_\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_1t/\hbar}|\psi_1\rangle \pm e^{-iE_2t/\hbar}|\psi_2\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-iE_1t/\hbar}|\psi_+\rangle + e^{-iE_1t/\hbar}|\psi_-\rangle \pm e^{-iE_2t/\hbar}|\psi_+\rangle \mp e^{-iE_2t/\hbar}|\psi_-\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-iE_1t/\hbar} \pm e^{-iE_2t/\hbar}\right)|\psi_+\rangle + \frac{1}{2}\left(e^{-iE_1t/\hbar} \mp e^{-iE_2t/\hbar}\right)|\psi_-\rangle \end{aligned} \tag{4-12}$$

Im nächsten Schritt berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $p_+^{(\pm)}(t)$, nach der Zeit *t* einen Messwert *A=+1* zu erhalten, wenn zur Zeit *t=0* der Wert *A=±1* gemessen wurde. Der Projektor auf *A=+1* ist

$$\mathbf{P}_+ = |\psi_+\rangle\langle\psi_+| = \frac{1}{2}\left\{|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle\right\}\left\{\langle\psi_1| + \langle\psi_2|\right\}. \tag{4-13}$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
p_+^{(\pm)}(t) &= \langle \psi_\pm | \mathbf{U}^+(t)\,\mathbf{P}_+\,\mathbf{U}(t) | \psi_\pm \rangle \\
&= \frac{1}{4}\left\{ \langle \psi_+ | \left(e^{iE_1 t/\hbar} \pm e^{iE_2 t/\hbar}\right) + \langle \psi_- | \left(e^{iE_1 t/\hbar} \mp e^{iE_2 t/\hbar}\right) \right\} \left\{ |\psi_+\rangle\langle\psi_+| \right\} \\
&\qquad \left\{ \left(e^{-iE_1 t/\hbar} \pm e^{-iE_2 t/\hbar}\right)|\psi_+\rangle + \left(e^{-iE_1 t/\hbar} \mp e^{-iE_2 t/\hbar}\right)|\psi_-\rangle \right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{ 1 \pm e^{i\alpha} \pm e^{-i\alpha} + 1 \right\} = \frac{1}{2}\left\{ 1 \pm \cos(\alpha) \right\}, \\
\text{mit}\quad \alpha &= (E_1 - E_2)\,t/\hbar.
\end{aligned}
\tag{4-14}
$$

Nun berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $p_+(0)$, unmittelbar nach der Präparation den Messwert $A=+1$ zu erhalten:

$$
\begin{aligned}
p_+(0) &= \left\{ c_1^* \langle \psi_1 | + c_2^* \langle \psi_2 | \right\} |\psi_+\rangle\langle\psi_+| \left\{ c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ c_1^* \langle \psi_1 | + c_2^* \langle \psi_2 | \right\}\left\{ |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle \right\}\left\{ \langle \psi_1 | + \langle \psi_2 | \right\}\left\{ c_1 |\psi_1\rangle + c_2 |\psi_2\rangle \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ c_1^* c_1 + c_1^* c_2 + c_1 c_2^* + c_2 c_2^* \right\} = \frac{1}{2}\left| c_1 + c_2 \right|^2 .
\end{aligned}
\tag{4-15}
$$

Für aufeinander folgende Messungen ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit, den Messwert $A=+1$ zu erhalten zu

$$
\begin{aligned}
p_+([n+1]t) &= p_+(nt)\,p_+^{(+)}(t) + \left(1 - p_+(nt)\right) p_+^{(-)}(t) \\
&= p_+(nt)\,\frac{1}{2}\left\{ 1 + \cos(\alpha) \right\} + \left(1 - p_+(nt)\right)\frac{1}{2}\left\{ 1 - \cos(\alpha) \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{ 1 - \cos(\alpha) \right\} + \frac{1}{2}\,p_+(nt)(1+1)\cos(\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\left\{ 1 - \cos(\alpha) \right\} + p_+(nt)\cos(\alpha).
\end{aligned}
\tag{4-16}
$$

Wir zeigen nun durch vollständige Induktion, dass

$$
p_+(nt) = \frac{1}{2}\left\{ 1 - \cos^n(\alpha) \right\} + \frac{1}{2}\left| c_1 + c_2 \right|^2 \cos^n(\alpha)
\tag{4-17}
$$

ist. Für $n=0$ stimmt die Iterationsformel mit dem Ergebnis von (4-15) überein. Für $n=1$ erhält man

$$
\begin{aligned}
p_+(t) &= \frac{1}{2}\left\{ 1 - \cos(\alpha) \right\} + p_+(0)\cos(\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\left\{ 1 - \cos(\alpha) \right\} + \frac{1}{2}\left| c_1 + c_2 \right|^2 \cos(\alpha),
\end{aligned}
\tag{4-18}
$$

also auch das richtige Ergebnis.

Mit der Induktionsvoraussetzung (4-17) ergibt sich dann für n+1:

$$
\begin{aligned}
p_+\left((n+1)t\right) &= \frac{1}{2}\left[1-\cos(\alpha)\right] + p_+(nt)\cos(\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\left[1-\cos(\alpha)\right] + \left\{\frac{1}{2}\left[1-\cos(\alpha)\right] + \frac{1}{2}\left|c_1+c_1\right|^2\cos(\alpha)\right\}\cos(\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\left[1-\cos(\alpha)\right] + \left\{\frac{1}{2}\left(1-\cos(\alpha)^n\right) + \frac{1}{2}\left|c_1+c_2\right|^2\cos(\alpha)^n\right\}\cos(\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\left[1-\cos(\alpha)\right] + \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha)-\cos(\alpha)^{n+1}\right) + \frac{1}{2}\left|c_1+c_2\right|^2\cos(\alpha)^{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\left[1-\cos^{n+1}(\alpha)\right] + \frac{1}{2}\left|c_1+c_2\right|^2\cos(\alpha)^{n+1}.
\end{aligned}
\tag{4-19}
$$

Was passiert nun, wenn man den Abstand t zwischen den Messungen immer kürzer macht (*$t \to 0$, $\alpha \to 0$*) und dabei aber die gesamte Messzeit konstant hält (*nt=const*)? Für kleine α ist

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha)^n &= 1-\frac{1}{2}n\alpha^2 + \left(\frac{n}{24}+\frac{n(n-1)}{8}\right)\alpha^4 + O\left(n^3\alpha^6\right) \\
&= 1-\frac{1}{2}c_\alpha\alpha + \frac{c_\alpha}{24}\alpha^3 - \frac{c_\alpha}{8}\alpha^3 + \frac{c_\alpha^2}{8}\alpha^2 + O\left(\alpha^3\right) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 1, . \\
\text{mit}\quad c_\alpha &= n\alpha = n\left(E_1-E_2\right)t/\hbar
\end{aligned}
\tag{4-20}
$$

Also ist

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} p_+(nt) &= \lim_{t\to 0}\left\{\frac{1}{2}\left[1-\cos^n(\alpha)\right] + \frac{1}{2}\left|c_1+c_2\right|^2\cos(\alpha)^n\right\} = \frac{1}{2}\left|c_1+c_2\right|^2 \\
&= p_+(0), \quad \text{unabhängig von } n.
\end{aligned}
\tag{4-21}
$$

Wir sehen also, dass das System in seinem Zustand verharrt, unabhängig von der Messzeit.

Wasser in einem Kochtopf, dessen Quantenprozesse vollständig und dauernd beobachtet werden würde, könnte nach der Quantenmechanik nie zum kochen gebracht werden, auch wenn die Herdplatte noch so heiß ist.

Das Quantensystem entwickelt sich nur zwischen den Messungen, dann aber in allen seinen Möglichkeiten. Im Formalismus der Quantenmechanik findet die Messung in einem unendlich kurzen Augenblick statt. Dabei wird der Zustand klassisch konkret. Dieser klassisch konkrete Zustand kann sich nicht zeitlich entwickeln.