5. Wirkungen und die Grundgesetze der Physik

Mathematischer Anhang

Die Wirkungsfunktion der freien Bewegung

Für eine kräftefreie Bewegung lautet die Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\dot{S} + E\left(x, \tfrac{\partial S}{\partial x}\right) = \dot{S} + \frac{p^2}{2m} = \dot{S} + \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2}{2m} = 0\,. \tag{5-1}$$

Sie kann gelöst werden durch

$$S = p_c \cdot x - E_c t, \quad \text{mit den Konstanten } p_c \text{ und } E_c = \frac{p_c^{\ 2}}{2m}. \tag{5-2}$$

Dabei sind p_c und E_c Konstanten der Bewegung.

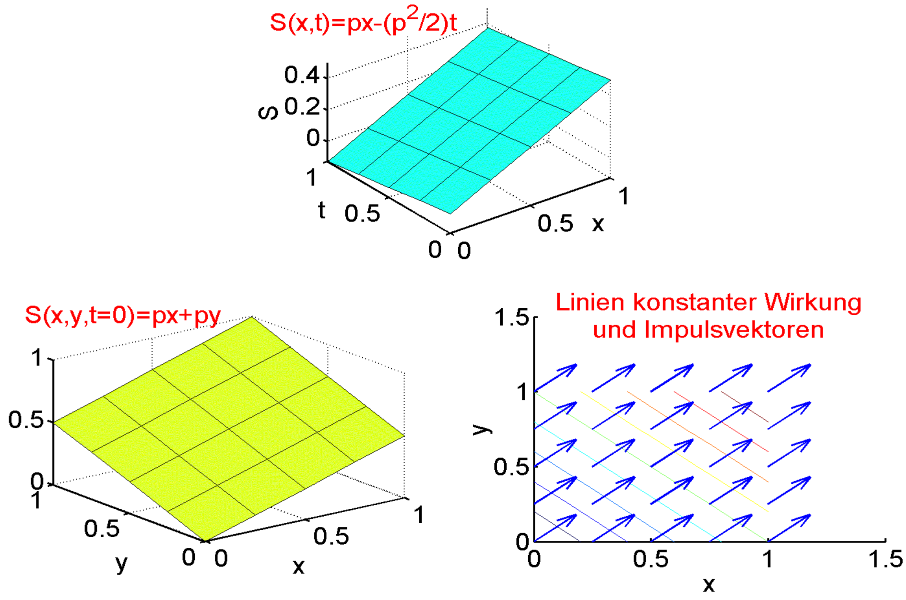
Die Hamilton-Jacobi-Gleichung und die Führungsbedingung führen zu

$$E = -\frac{\partial S}{\partial t} = E_c \quad \text{und} \quad p = \frac{\partial S}{\partial x} = p_c \tag{5-3}$$

Insgesamt ist also

$$\begin{aligned} &S = p_c \cdot x - E_c t = p_c \cdot x - \frac{p_c^{\ 2}}{2m} t \quad \text{und damit} \\ &\dot{S} + E = -\frac{p_c^{\ 2}}{2m} + \frac{p^2}{2m} = 0. \end{aligned} \tag{5-4}$$

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung wird durch (5-2) also gelöst. Abbildung 5-1 zeigt die Wirkungsfunktion graphisch.



Wirkungsfunktion S für eine kräftefreie Bewegung.

Oben: Wirkung eines kräftefreien Teilchens in einer Raum- und einer Zeitdimension.

Unten links: Wirkung eines kräftefreien Teilchens in zwei Raumdimensionen zur Zeit t=0.

Unten rechts: Linien konstanter Wirkung und Impulsvektoren für ein kräftefreies Teilchen in zwei Raumdimensionen zur Zeit t=0.

Abbildung 5-1

Linearisierung der Kontinuitätsgleichung und die Schrödinger-Gleichung

Zur Linearisierung der Kontinuitätsgleichung führen wir ein neues Feld y ein als Kombination von Wahrscheinlichkeitsfunktion und Wirkungsfunktion:

$$y = \sqrt{r}\, e^{iS/\hbar} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = y^{*} y \\ S = \dfrac{\hbar}{2i} \ln \dfrac{y}{y^{*}} \end{cases} \qquad (5\text{-}5)$$

Damit kann die Energie E und der Impuls p ausgedrückt werden:

$$
\begin{aligned}
r\,p = r\,\frac{\partial S}{\partial x} &= y^{*} y\,\frac{\hbar}{2i}\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{y}{y^{*}} = \frac{\hbar}{2i} y^{*2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{1}{y^{*}} - \frac{y}{y^{*2}}\frac{\partial y^{*}}{\partial x}\right) \\
&= \frac{\hbar}{2i}\left(y^{*}\frac{\partial y}{\partial x} - y\,\frac{\partial y^{*}}{\partial x}\right) \\
r\,E = r\,\frac{\partial S}{\partial t} &= \frac{\hbar}{2i}\left(y^{*}\frac{\partial y}{\partial t} - y\,\frac{\partial y^{*}}{\partial t}\right)
\end{aligned}
\tag{5-6}
$$

Nun drücken wir die Kontinuitätsgleichung in dem neuen y-Feld aus:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{m}\,r\right) = 0 \\
&\frac{\partial y^{*}}{\partial t} y + y^{*}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\hbar}{2im}\frac{\partial}{\partial x}\left(y^{*}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y^{*}}{\partial x} y\right) = 0 \\
&\frac{\partial y^{*}}{\partial t} y + y^{*}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\hbar}{2im}\left(y^{*}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y^{*}}{\partial x^2} y\right) = 0 \\
&\left(\frac{\partial y^{*}}{\partial t} - \frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2 y^{*}}{\partial x^2}\right) y + y^{*}\left(\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = 0
\end{aligned}
\tag{5-7}
$$

und kommen zu den beiden Formen der Schrödinger-Gleichung

$$
\begin{aligned}
&y\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) y^{*} + y^{*}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar}{2im}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) y = 0 \quad \cdot\frac{\hbar}{i} \\
&y\,\underbrace{\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V\right) y^{*}}_{=0\ \left(\text{Schrödinger-Gleichung}^{*}\right)} - y^{*}\,\underbrace{\left(-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - V\right) y}_{=0\ \left(\text{Schrödinger-Gleichung}\right)} = 0
\end{aligned}
\tag{5-8}
$$

Das Potential *W* wurde dabei einmal addiert und einmal subtrahiert, so dass die Gleichung erfüllt bleibt

Der Kausaldruck

In der Energiefunktion muss die zeitliche Änderung der Felder über die Kontinuitätsgleichung in räumliche Änderungen umgewandelt werden. Damit ist gewährleistet, dass die Energiefunktion neben der Homogenität raumzeitlicher Bezüge auch die Kontinuität kausaler Zusammenhänge berücksichtigt. Wir rechnen also

$$
\begin{aligned}
r\,E &= -r\,\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2i}\left(y^{*}\frac{\partial y}{\partial t} - y\,\frac{\partial y^{*}}{\partial t} \right) \\
&\underbrace{=}_{\substack{\text{Kontinuitäts-}\\ \text{gleichung}}} -\frac{1}{2}\left(y^{*}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - Vy \right) - y\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 y^{*}}{\partial x^2} + Vy^{*} \right) \right) \\
&\underbrace{=}_{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}} \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial y^{*}}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} + rV \\
&= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial x} - \sqrt{r}\,\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial x} \right) e^{-iS/\hbar} \left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial x} + \sqrt{r}\,\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial x} \right) e^{iS/\hbar} + rV \\
&= \frac{1}{2m}\left(\left(\hbar\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial x} \right)^2 + r\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \right) + rV \\
&= r\left(\underbrace{\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \underbrace{\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial x} \right)^2 + V}_{P+V=W}}_{\substack{\text{Energiefunktion aus den}\\ \text{homogenen raumzeitlichen Beziehungen}}} \right)
\end{aligned}
\qquad (5\text{-}9)
$$

Diesem Ergebnis liegt ausschließlich die Kausalität zugrunde. Durch Vergleich mit der bekannten Energiefunktion, die auf der Grundlage homogener raumzeitlicher Beziehungen hergeleitet wurde, lässt sich das Potential *W* als Summe aus Kausaldruck *P* und konventionellem Potential *V* identifizieren.

Relativistisch invariante Formulierung

Ausbreitungsgeschwindigkeit c von Lichtsignalen unabhängig vom Bezugssystem

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit *c* von Lichtsignalen unabhängig vom Bezugssystem bedeutet, dass die Punkte auf einem Lichtkegel in jedem Bezugssystem durch den Ausdruck

$$x^2 - c^2t^2 = 0 \qquad (5\text{-}10)$$

beschrieben werden. Dies legt die Beziehung zwischen den Bezugs- bzw. Koordinatensystemen fest. Alle physikalischen Phänomene müsse daher durch sogenannte Vierer-Vektoren im Minkowsky-Raum beschrieben werden. Damit ist die Unabhängigkeit der mathematischen Beschreibung vom Bezugssystem gewährleistet. Die Vierer-Ortsvektoren sind:

$$\left.\begin{aligned} x_m &= (ct, x) \\ x^m &= (-ct, x) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_m x^m = x^2 - c^2 t^2 = 0 \tag{5-11}$$

Ferner kann eine invariante Zeit oder Eigenzeit dt bestimmt werden, die in allen Bezugssystem gleich ist. Sie muss durch Vierervektoren ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} &(dx)^2 - c^2 (dt)^2 = \left(v^2 - c^2\right)(dt)^2 = -c^2 (dt)^2 \\ &\frac{dt}{dt} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \tag{5-12}$$

v ist dabei die Relativgeschwindigkeit der Bezugssysteme.

Nun kann die Vierer-Geschwindigkeit als invariante, zeitliche Änderung des Vierer-Ortes definiert werden.

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{dx_m}{dt} = \frac{1}{\sqrt{v^2 - c^2}} \frac{dx_m}{dt} = \frac{1}{\sqrt{v^2 - c^2}} \frac{d(ct, x)}{dt} = \frac{1}{\sqrt{v^2 - c^2}} (c, v) \\ v_m v^m &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^2} \left(c^2 - v^2\right) = -c^2 \end{aligned} \tag{5-13}$$

Die Wirkungsfunktion darf natürlich auch nicht vom Bezugssystem abhängen und dies führt auf den und Vierer-Impuls

$$dS = p_m dx^m = p dx - E dt \quad \Rightarrow \quad p_m = (E/c, p) \tag{5-14}$$

Letztlich kann noch die relativistische Energiefunktion als Ableitung der Wirkungsfunktion nach der invarianten Zeit angegeben werden

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{dt} p_m dx^m = p_m v^m = \frac{1}{m} p_m p^m = m v_m v^m = m v_m v^m = -mc^2 \tag{5-15}$$

also

$$m \frac{dS}{dt} = p_m p^m = -m^2 c^2 \quad \text{bzw.} \quad E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

Damit sind alle invarianten Größen in einer homogenen Raumzeit mit unabhängiger Ausbreitungsgeschwindigkeiten *c* angegeben.

Im Ruhesystem mit *p=0* folgt speziell noch die berühmte Einstein-Gleichung

$$E = mc^2 \tag{5-16}$$

Diese Formel der Äquivalenz von Energie und Masse ist die Grundlage der Atomenergie und der Atombombe.

Invariante Kontinuitätsgleichung:

Auch die Kontinuitätsgleichung für die Wahrscheinlichkeitsfunktion r muss so angegeben werden, dass die Lichtgeschwindigkeit c in jedem Bezugssystem dieselbe ist, also durch die oberen Vierervektoren und Skalare:

$$\frac{\partial}{\partial x_m}\underbrace{\left(\frac{p_m}{m}\,r\right)}_{\substack{=j^m\\ \text{(Wahrschein-}\\ \text{lichkeitsstrom)}}}=0 \quad \text{also} \quad \frac{\partial}{\partial ct}\left(\frac{E\,r}{mc}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p\,r}{m}\right)=0 \qquad (5\text{-}17)$$

Wie im nichtrelativistischen Fall wird zur Linearisierung dieser Gleichung Wahrscheinlichkeitsfunktion r und Wirkungsfunktion S kombiniert zu

$$y=\sqrt{r}\,e^{iS/\hbar} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r=y^{*}y \\ S=\dfrac{\hbar}{2i}\ln\dfrac{y}{y^{*}} \end{cases} \qquad (5\text{-}18)$$

In dieser Funktion y hat der Viererimpuls die Form

$$\begin{aligned} r\,\frac{\partial}{\partial x^m}S = r\,p_m &= y^{*}y\,\frac{\hbar}{2i}\frac{\partial}{\partial x^m}\ln\frac{y}{y^{*}}=\frac{\hbar}{2i}y^{*2}\left(\frac{1}{y^{*}}\frac{\partial y}{\partial x^m}-\frac{y}{y^{*2}}\frac{\partial y^{*}}{\partial x^m}\right)\\ &=\frac{\hbar}{2i}\left(y^{*}\frac{\partial y}{\partial x^m}-y\,\frac{\partial y^{*}}{\partial x^m}\right) \end{aligned} \qquad (5\text{-}19)$$

Kontinuitätsgleichung und Klein-Gordon Gleichung

Die Linearisierung der relativistisch invarianten Kontinuitätsgleichung führt nun auf die Klein-Gordon Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial x_m}\left(r\,\frac{p_m}{m}\right)=\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\hbar}{2mi}\left(y^{*}\frac{\partial y}{\partial x^m}-y\,\frac{\partial y^{*}}{\partial x^m}\right)\\ &=\frac{\hbar}{2mi}\left(y^{*}\frac{\partial^2 y}{\partial x_m\partial x^m}-\frac{M^2c^2}{\hbar^2}y^{*}y-y\,\frac{\partial^2 y^{*}}{\partial x_m\partial x^m}+\frac{M^2c^2}{\hbar^2}y^{*}y\right)\\ &=\frac{\hbar}{2mi}\left(y^{*}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_m\partial x^m}-\frac{M^2c^2}{\hbar^2}y\right)}_{=0\ \text{(Klein Gordon Gleichung)}}-y\,\underbrace{\left(\frac{\partial^2 y^{*}}{\partial x_m\partial x^m}-\frac{M^2c^2}{\hbar^2}y^{*}\right)}_{=0\ \text{(Klein Gordon Gleichung)}}\right) \end{aligned} \qquad (5\text{-}20)$$

Nun drücken wir die Klein-Gordon-Gleichung wieder durch die Wirkungsfunktion S und die Wahrscheinlichkeitsfunktion r aus. Zunächst berechnen wir

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_m \partial x^m} = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial y}{\partial x^m}\right) = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x^m} + \frac{i\sqrt{r}}{\hbar}\underbrace{p_m}_{=\frac{\partial S}{\partial x^m}}\right)e^{iS/\hbar}$$
$$= \left(\frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial x_m \partial x^m} + \frac{i}{\hbar}\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x_m}p_m + \frac{i\sqrt{r}}{\hbar}\frac{\partial p_m}{\partial x_m} + \frac{i}{\hbar}\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x_m}p_m + \frac{i}{\hbar}\frac{i\sqrt{r}}{\hbar}p_m p^m\right)e^{iS/\hbar}$$
$$= \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial x_m \partial x^m} + \underbrace{2\frac{i\hbar}{\sqrt{r}}\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x_m}p_m + i\hbar\frac{\partial p_m}{\partial x_m}}_{=A=0\ (\text{Kontinuitätsgleichung})} - p_m p^m\right)\sqrt{r}\,e^{iS/\hbar} \tag{5-21}$$

Es gilt A=0 wegen der Kontinuitätsgleichung

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_m} j_m = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\sqrt{r}^2 p_m\right) = 2\sqrt{r}\frac{\partial \sqrt{r}}{\partial x_m}p_m + \sqrt{r}^2\frac{\partial p_m}{\partial x_m} = \frac{\sqrt{r}^2}{i\hbar}A$$
$$\Rightarrow A = 0 \tag{5-22}$$

Also ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_m \partial x^m} = \frac{1}{\hbar^2}\left(\frac{\hbar^2}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial x_m \partial x^m} - p_m p^m\right)y \tag{5-23}$$

Kausaldruck *P:*

Nun vergleichen wir wie im nichtrelativistischen Fall die Kontinuitätsgleichung, hier also die Klein-Gordon-Gleichung mit dem Energiesatz:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_m \partial x^m} = \dfrac{M^2 c^2}{\hbar^2}y \quad \text{und} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_m \partial x^m} = \dfrac{1}{\hbar^2}\left(\dfrac{\hbar^2}{\sqrt{r}}\dfrac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial x_m \partial x^m} - p_m p^m\right)y \end{array}\right. \tag{5-24}$$

also invariante Energie

$$\underbrace{p_m p^m = -M^2 c^2 + \overbrace{\frac{\hbar^2}{\sqrt{r}}\frac{\partial^2 \sqrt{r}}{\partial x_m \partial x^m}}^{\text{Kausaldruck } P}}_{\text{Kontinuitäts-Gleichung}} = \underbrace{-m^2 c^2 = p_m p^m}_{\text{relativistischer Energiesatz}}$$

So können wir auch hier den Kausaldruck *P* identifizieren.

Energiefunktion und Elektrodynamik

Die Energiefunktion für Mechanik und Elektrodynamik ergibt sich wieder durch Aufteilung der Wirkung auf das Körperliche und seine Beziehungen, also durch

(5-25)

$$\begin{cases} m\dfrac{dS}{dt} + m^2c^2 = p_m p^m + m^2c^2 = 0 \\ p_m \to \left(\tilde{p}_m + A_m\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= \left(\tilde{p}_m + A_m\right)\left(\tilde{p}^m + A^m\right) + m^2c^2 \\ &= \underbrace{\tilde{p}_m \tilde{p}^m + m^2c^2}_{\text{Mechanik}} + \underbrace{A_m A^m}_{\substack{\text{Elektro-}\\ \text{dynamik}}} + \underbrace{2\tilde{p}_m A^m}_{\substack{\text{elektromagnetische}\\ \text{Wechselwirkung}}} \end{aligned}$$

oder

$$E^2 = \underbrace{p^2c^2 + m^2c^4}_{\text{Mechanik}} + \underbrace{c^2 A_m A^m}_{\substack{\text{Elektro-}\\ \text{dynamik}}} - \underbrace{2Ef + 2c^2\, p \cdot A}_{\substack{\text{elektromagnetische}\\ \text{Wechselwirkung}}}$$