7. Quantenphänomene

Mathematischer Anhang

Der halbdurchlässige Spiegel für Wirkungsquanten

Die Schrödinger-Gleichung

Wir beschreiben einen Spiegel am Ort *x=0* durch eine δ-Funktion. Die Schrödinger-Gleichung lautet dann

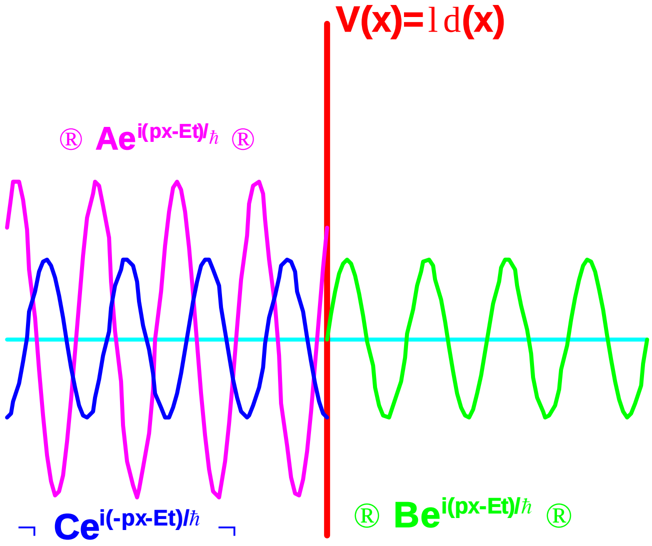
$$-\frac{\hbar}{i}\partial_t y\,(x,t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2+l\,d\,(x)\right)y\,(x,t)\,. \tag{7-1}$$

Die Wellenfunktion

Als Randbedingung geben wir vor, dass ein Wirkungsquant von links einläuft und teilweise reflektiert wird. Der Rest passiert den Spiegel. Zur Lösung der Schrödinger-Gleichung machen wir dann den Ansatz mit ebenen Wellen

$$y\,(x,t)=\begin{cases} Ae^{i(px-Et)/\hbar}+Ce^{i(-px-Et)/\hbar} & \forall x<0; \\ Be^{i(px-Et)/\hbar} & \forall x\geq 0. \end{cases} \tag{7-2}$$

Die von links einfallende Welle hat die Amplitude *A*, die Amplituden der anderen Komponenten wollen wir im Folgenden berechnen. Der Ansatz besteht aus nach links und nach rechts laufenden ebenen Wellen, die Lösungen der freien Schrödinger-Gleichung sind. *E* ist der Energieeigenwert der Schrödinger-Gleichung und der Zusammenhang mit dem Impulsparameter *p* ergibt sich durch Einsetzen der ebenen Wellen in die Schrödinger-Gleichung zu $E=p^2/2m$. Das entspricht der Dispersionsrelation des Wellenbildes.



Ansatz der Wellenfunktion am halbdurchlässigen Spiegel

Abbildung 7-1

Um Schreibarbeit zu sparen, werden wir die Potentialstärke auf

$$l = \frac{\hbar p}{m} \qquad (7\text{-}3)$$

festlegen. Wir werden am Ende sehe, dass dann der Spiegel genau halbdurchlässig ist.

Stetigkeit

Die Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit für das Wirkungsquant fordert Stetigkeit der Wellenfunktion bei *x=0,* also

$$y(0,t) = Ae^{i(p\cdot 0 - Et)/\hbar} + Ce^{i(-p\cdot 0 - Et)/\hbar} \quad \text{und} \quad y(0,t) = Be^{i(p\cdot 0 - Et)/\hbar} \qquad (7\text{-}4)$$
$$\Rightarrow \quad A + C = B.$$

Die Ableitungen

Wegen der δ-Funktion bei *x=0* in Gleichung (7-1) kann die Ableitung der Wellenfunktion dort nicht stetig sein. Da diese Distribution nur über eine Integration definiert ist, leiten wir aus der Schrödinger-Gleichung den Ausdruck

$$\partial_x^2 y(x,t) = \frac{2m}{\hbar^2}\left(l\, d(x) - E\right) y(x,t) = \left(\frac{2p}{\hbar} d(x) - \frac{2m}{\hbar^2} E\right) y(x,t) \qquad (7\text{-}5)$$

ab und führen in unmittelbarer Umgebung des Spiegels eine Integration durch:

$$\lim_{e\to 0}\int_{-e}^{e}\partial_x^2 y\,(x,t)dx = \partial_x y\,(x,t)\big|_{x=+0} - \partial_x y\,(x,t)\big|_{x=-0} \quad \text{und}$$
$$\lim_{e\to 0}\int_{-e}^{e}\partial_x^2 y\,(x,t)dx = \lim_{e\to 0}\int_{-e}^{e}\left(\frac{2p}{\hbar}d\,(x) - \frac{2m}{\hbar^2}E\right)y\,(x,t)dx = \frac{2p}{\hbar}y\,(0,t). \tag{7-6}$$

Daraus folgt für die Ableitungen der Wellenfunktion

$$\partial_x y\,(x,t)\big|_{x=+0} - \partial_x y\,(x,t)\big|_{x=-0} = i\frac{p}{\hbar}(B - A + C)e^{i(p\cdot 0 - Et)/\hbar} = \frac{2p}{\hbar}Be^{i(p\cdot 0 - Et)/\hbar}. \tag{7-7}$$

Das liefert einen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten für Transmission und Reflexion:

$$(B - A + C) = -2iB \quad \Rightarrow \quad C = -(1 + 2i)B + A. \tag{7-8}$$

Mit der Bedingung für Stetigkeit aus Gleichung (7-4) *(A+C=B)* folgt dann

$$A + C = -(1 + 2i)B + 2A = B \quad \Rightarrow$$
$$B = \frac{1}{1+i}A = \frac{1-i}{2}A = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}A = e^{ij}\frac{1}{\sqrt{2}}A, \tag{7-9}$$

(φ ist eine belanglose Phase) und

$$C = B - A = \left(\frac{1-i}{2} - 1\right)A = \frac{-1-i}{2}A = -iB. \tag{7-10}$$

Der reflektierte Strahl hat also relativ zum durchgehenden eine Phase von *-i*. Weiterhin ist der Spiegel wegen $|B|^2=|C|^2=1/2$ wie versprochen halbdurchlässig.