9. Die Relativität räumlicher und zeitlicher Bezüge

Mathematischer Anhang

Nachweis der Lorentz-Invarianz:

Für die Transformation zwischen bewegten Bezugssystemen mit invarianter Lichtgeschwindigkeit *c* versucht man einen in der Geschwindigkeit *v* linearen Ansatz. Die einfachste Form mit richtigen Dimensionen für Ort und Zeit ist

$$
\begin{aligned}
x &\rightarrow x' = g\left(x - vt\right) \\
t &\rightarrow t' = g\left(t - xv/c^2\right)
\end{aligned}
\tag{9-1}
$$

Es muss nur noch der Faktor γ bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
& g^2\left(x - vt\right)^2 + y^2 + z^2 - c^2 g^2\left(t - xv/c^2\right)^2 = c^2 t^2 \quad \Rightarrow \\
& g^2\left(x^2 \underbrace{-2xvt}_{X} + \underbrace{v^2t^2}_{A}\right) + y^2 + z^2 - g^2\left(c^2t^2 \underbrace{-2xvt}_{-X} + \underbrace{x^2v^2/c^2}_{B}\right) = c^2t^2 \quad \Rightarrow \\
& g^2x^2\left(1 \underbrace{-v^2/c^2}_{B}\right) + y^2 + z^2 - g^2c^2t^2\left(1 - \underbrace{v^2/c^2}_{A}\right) = c^2t^2.
\end{aligned}
\tag{9-2}
$$

Mit

$$
g = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = c^2t^2.
\tag{9-3}
$$

Damit ist die Lorentz-Transformation gefunden und gleichzeitig gezeigt, dass auch die invariante Zeit *t* unter der Transformation tatsächlich invariant ist.