11. David Bohm und die Implizite Ordnung

Mathematischer Anhang

Streng stetig, streng kausal, streng lokal

Relativitätstheorie

In der speziellen Relativitätstheorie beschreibt man zum Beispiel die Weltlinie eines Massenpunktes durch einen Viererortsvektor x_m und parametrisiert ihn durch die Eigenzeit τ:

$$x_m(t) = \left(\vec{x}(t), -ct(t)\right). \qquad (11\text{-}1)$$

Die strenge Stetigkeit der Bewegung auf der Weltlinie besteht darin, dass an keiner Stelle ein Sprung auftritt:

$$\lim_{h \to 0} x_m(t+h) = x_m(t) \quad \forall t\ . \qquad (11\text{-}2)$$

Die Relativitätstheorie ist streng kausal, weil zeitliche Änderungen physikalischer Größen wie Ort, Geschwindigkeit, Energie, Impuls oder Wirkung durch Differentialgleichungen beschrieben werden. Die zeitlichen Änderungen sind damit eindeutig festgelegt.

Zum Beispiel lautet nach Kapitel 9 die Hamilton-Jacobi-Gleichung der speziellen Relativitätstheorie

$$\frac{dS}{dt} = p_m \frac{dx^m}{dt} = -mc^2. \qquad (11\text{-}3)$$

Alle zeitlichen Änderungen der Wirkungsfunktion *dS/t* sind damit stetig und eindeutig bestimmt.

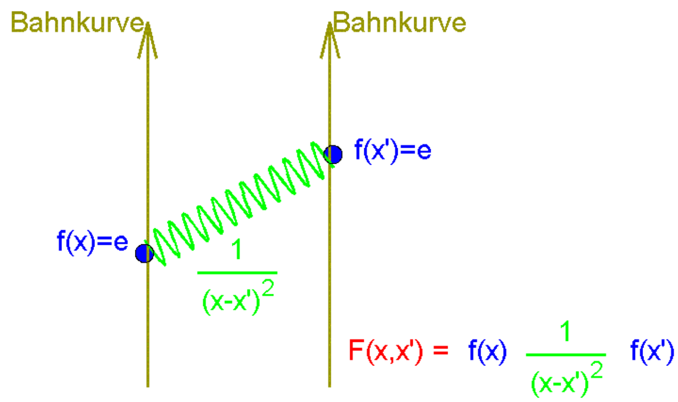
Eine Theorie ist lokal, wenn sich Wirkungen nur über lokale Wechselwirkungen übertragen. Eine Wechselwirkung heißt lokal oder Punktwechselwirkung, wenn sie in jedem Raum-Zeit-Punkt *(x,t)* unabhängig von allen anderen Punkten *(x',t')* eingeführt werden kann.

Die Kraft zwischen zwei geladenen Teilchen an den Orten *x* und *x'* ist zunächst nichtlokal:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F(x, x') \\ m\ddot{x}' &= -F(x, x') \end{aligned}\right\} \quad \text{mit} \quad F = \frac{e^2}{(x - x')^2}. \qquad (11\text{-}4)$$

Indem man sagt, dass sie durch eine photonische Wirkung vermittelt wird, macht man sie lokal:

$$F = \underbrace{e}_{\substack{\text{Kraft}\\ f(x)}} \underbrace{\frac{1}{(x-x')^2}}_{\substack{\text{Propagation der}\\ \text{photonischen}\\ \text{Wirkung}}} \underbrace{e}_{\substack{\text{Kraft}\\ f(x')}} . \qquad \text{(11-5)}$$



Die nichtlokale Kraft $F(x,x')$ *wird lokal, wenn eine (photonische) Wirkung von x nach x' propagiert und so die Kraft vermittelt. In der Relativitätstheorie ist dies formal immer möglich, in der Quantenmechanik nicht.*

Abbildung 11-1

In der Relativitätstheorie können auf diese Weise alle Wechselwirkungen lokal beschrieben werden.

Quantenmechanik

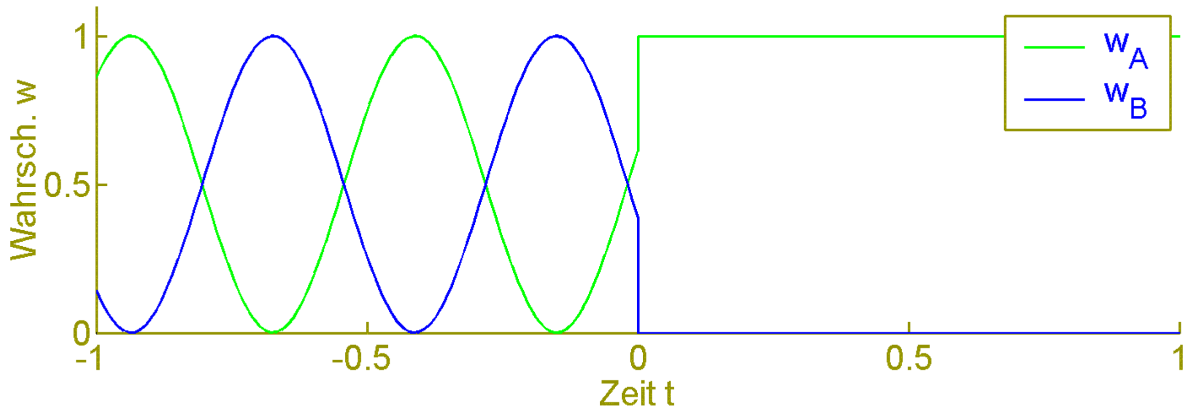
In der Quantenmechanik betrachtet man keine Objekte mit Eigenschaften wie Ort, Impuls oder innerer Zustand, sondern Wahrscheinlichkeiten für Ergebnisse bestimmter Messungen.

Wir diskutieren hier der Einfachheit halber ein System, an dem zwei Messergebnisse *A* und *B* möglich sind, zum Beispiel ein Atom. Es kann im Grundzustand |*A*> und in einem angeregten Zustand |*B*> sein. Der gesamte Zustand y ist eine Überlagerung der beiden möglichen Zustände:

$$|y(t)\rangle = a(t)|A\rangle + b(t)|B\rangle : \qquad \text{(11-6)}$$

$$\begin{cases} w_A(t) = |a(t)|^2 = \text{Wahrscheinlichkeit für Meßwert } A; \\ w_B(t) = |b(t)|^2 = \text{Wahrscheinlichkeit für Meßwert } B. \end{cases}$$

Im Moment der Messung findet eine unstetige Änderung der Wahrscheinlichkeiten w_A und w_B statt. In Abbildung 11-2 wurde bei einer Messung zur Zeit *t=0* das Atom im Zustand *A* gefunden.



Instantane Änderung der Wahrscheinlichkeiten für die Messergebnisse A und B. Zur Zeiten t<0 wurden das System nicht ausgemessen. Zum Zeitpunkt t=0 findet eine Messung statt und dabei manifestiert sich der Zustand des Systems als A. Die unstetige Änderung der Wahrscheinlichkeiten bei der Messung bezeichnet man als Quantensprung.

Abbildung 11-2

Man spricht von einem Quantensprung zur Zeit *t=0*. Die Wahrscheinlichkeiten ändern sich dabei unstetig. Zu allen anderen Zeiten verändern sich die Wahrscheinlichkeiten stetig.

Der so genannte Quantensprung bei der Messung ist nicht kausal oder nicht deterministisch. Man berechnet Wahrscheinlichkeiten für ein Messergebnis. Welche der verschiedenen Möglichkeiten sich tatsächlich in der Beobachtung manifestiert, ist jedoch durch die Gesetze der Quantenmechanik nicht festgelegt.

Man kann feine physikalische Phänomene grundsätzlich nur mit Wahrscheinlichkeiten beschreiben, weil die Genauigkeit der Position einer Wirkung im Phasenraum oder Orts-Impuls-Raum durch die Plancksche Naturkonstante h begrenzt ist.

Die Nichtlokalität der Quantenphänomene wird in Kapitel 7 ausführlich diskutiert. Für eine prägnante und formale Diskussion betrachten wir ein System, an dem zwei unterschiedliche Messungen der Art *1* und der Art *2* vorgenommen werden können, zum Beispiel zwei Atome. Bei Messungen kann festgestellt werden, ob sich eines im Grundzustand *A* oder im angeregten Zustand *B* befindet. Ein spezieller Gesamtzustand des Systems sei

$$|y(t)\rangle = \sqrt{\frac{1}{6}}|A\rangle_1|A\rangle_2 + \sqrt{\frac{2}{6}}|A\rangle_1|B\rangle_2 + \sqrt{\frac{3}{6}}|B\rangle_1|A\rangle_2 . \qquad (11\text{-}7)$$

Messungen entweder der Art *1* oder der Art *2* ergeben die Wahrscheinlichkeiten

$$\text{für Art 1:} \begin{cases} w_A^{(1)} = \dfrac{1}{2}; \\ w_B^{(1)} = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \qquad \text{für Art 2:} \begin{cases} w_A^{(2)} = \dfrac{2}{3}; \\ w_B^{(2)} = \dfrac{1}{3}. \end{cases} \tag{11-8}$$

Gleichzeitig mit einer Messung, egal ob von der Art *1* oder *2,* ändern sich instantan alle Wahrscheinlichkeiten. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Werte. Wurde zum Beispiel bei einer ersten Messung der Art *1* der Zustand *A* gefunden, hat sich die Wahrscheinlichkeit für den Wert einer neuen Messung der Art *2* für *A* von 2/3 auf *1/3* reduziert, der für *B* hat sich auf *2/3* erhöht.

(11-9)

	$w_A^{(1)}$	$w_B^{(1)}$	$w_A^{(2)}$	$w_B^{(2)}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
Art $1 \rightarrow A$	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Art $1 \rightarrow B$	0	1	1	0
Art $2 \rightarrow A$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	0
Art $2 \rightarrow B$	1	0	0	1

Die beiden Messungen der Art *1* und Art *2* können in praktischen Experimenten Kilometerweit voneinander entfernt sein. Trotzdem ändern sich die Messwahrscheinlichkeiten instantan. Dies kann durch keine lokale Wechselwirkung formalisiert werden.

Allgemein werden diese Zusammenhänge in den Bellschen Ungleichungen formuliert. Der Klassiker unter den entsprechenden Experimenten stammt von der Aspect-Kooperation. Beides wird in (Bräuer 2000) beschrieben.

Energie-Impuls-Tensor der relativistischen Gravitationstheorie

Der Energie-Impuls-Tensor der freien relativistischen Gravitationstheorie ist definiert über die Vierergeschwindigkeit

$$u_m = \frac{dx^m}{ds}, \quad \text{mit} \quad \underbrace{(ds)}_{\substack{\text{invariantes}\\ \text{Linien-}\\ \text{element}}}{}^2 = \underbrace{g_{mn}}_{\substack{\text{metrischer}\\ \text{Fundamental-}\\ \text{tensor}}} dx^m dx^n \,. \tag{11-10}$$

Er lautet

$$T_{mn} = m u_m u_n \,. \tag{11-11}$$

T_{00} ist die Energiedichte, T_{0k} ist die Impulsdichte und der Rest beschreibt Energie-Impuls-Spannungen. In der Einsteinschen Gravitationsgleichung ist der Energie-Impuls-Tensor die Quelle der Raumkrümmung.

Ganzheitlichkeit der Quantenphänomene

Die Ganzheitlichkeit der Quantensysteme wird ausführlich in Kapitel 7 am Beispiel des Quanteninterferometers beschrieben. Sie wird dort sehr deutlich vor allem an der Rolle des Wegedetektors. Allein seine Anwesenheit beeinflusst die Möglichkeiten verschiedener Messergebnisse grundlegend, selbst wenn er gar nicht anspricht und Kilometerweit von den tatsächlich beobachteten Wirkungen entfernt ist.

Der Wegedetektor ermöglicht es, den Weg einer Wirkung durch das Interferometer festzustellen und damit beeinflusst er die Ausbreitung möglicher Wirkungen wesentlich.

Die Ganzheitlichkeit der Quantenphänomene lässt sich auch am Unterschied von abhängigen und unabhängigen Wahrscheinlichkeiten klar machen.

Wir betrachten zunächst N unabhängige Quantensysteme, die in den Zuständen M_k angetroffen werden können. Die Wahrscheinlichkeiten in jedem System werden durch $|c_k|^2$ angegeben.

Da die Systeme unabhängig voneinander sind, ist die Gesamtwahrscheinlichkeit gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Systeme und die quantenmechanische Gesamtwellenfunktion y und die Wahrscheinlichkeit w können als Produkt der Einzelwellenfunktionen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} y_N^{(\text{unabhängig})} &= y^{(1)} y^{(2)} \ldots y^{(i)} \ldots y^{(N)} \\ &= \underbrace{\sum c_{k_1}^{(1)} \left|M_{k_1}\right\rangle}_{y^{(1)}} \underbrace{\sum c_{k_2}^{(2)} \left|M_{k_2}\right\rangle}_{y^{(2)}} \ldots \underbrace{\sum c_{k_i}^{(i)} \left|M_{k_i}\right\rangle}_{y^{(i)}} \ldots \underbrace{\sum c_{i_N}^{(N)} \left|M_{i_N}\right\rangle}_{y^{(N)}} \\ &= \sum c_{k_1}^{(1)} c_{k_2}^{(2)} \ldots c_{k_i}^{(i)} \ldots c_{k_N}^{(N)} \left|M_{k_1}\right\rangle \left|M_{k_2}\right\rangle \ldots \left|M_{k_i}\right\rangle \ldots \left|M_{k_N}\right\rangle \end{aligned} \tag{11-12}$$

$$w^{(\text{unabhängig})} = \left|c_{k_1}^{(1)}\right|^2 \left|c_{k_2}^{(2)}\right|^2 \ldots \left|c_{k_i}^{(i)}\right|^2 \ldots \left|c_{k_N}^{(N)}\right|^2 = \left|c_{k_1}^{(1)} c_{k_2}^{(2)} \ldots c_{k_i}^{(i)} \ldots c_{k_N}^{(N)}\right|^2 .$$

In der Regel sind die Einzelsysteme jedoch in Kontakt miteinander und ihre Wahrscheinlichkeiten vermischen sich. Die allgemeinere Quantenwellenfunktion muss dann lauten:

$$y_N^{(\text{abhängig})} = \sum c_{k_1 k_2 \ldots k_i \ldots k_N} \left|M_{k_1}\right\rangle \left|M_{k_2}\right\rangle \ldots \left|M_{k_i}\right\rangle \ldots \left|M_{k_N}\right\rangle . \tag{11-13}$$

Die Wahrscheinlichkeiten sind nun abhängig und berechnen sich als

$$w^{(\text{abhängig})} = \left|c_{k_1 k_2 \ldots k_i \ldots k_N}\right|^2 . \tag{11-14}$$

Die Messung an einem einzigen Teilsystem beeinflusst damit zwangsläufig alle anderen Teilsysteme. Das heißt, dass eine beliebige Messung instantan die Wahrscheinlichkeiten für Messungen an allen anderen Teilsystemen verändert:

$$y_N^{(\text{abhängig})} = \sum c_{k_1 k_2 \ldots k_i \ldots k_N} \left|M_{k_1}\right\rangle \left|M_{k_2}\right\rangle \ldots \left|M_{k_i}\right\rangle \ldots \left|M_{k_N}\right\rangle \tag{11-15}$$

$$\underbrace{\rightarrow}_{\substack{\text{Messung an}\\ \text{einem}\\ \text{Teilsystem}}} \sum \frac{c_{k_1 k_2 \ldots n \ldots k_N}}{\sqrt{\sum \left|c_{k_1 k_2 \ldots n \ldots k_N}\right|^2}} \left|M_{k_1}\right\rangle \left|M_{k_2}\right\rangle \ldots \left|M_n\right\rangle \ldots \left|M_{k_N}\right\rangle .$$

$$\text{mit der Wahrscheinlichkeit } \left|c_{k_1 k_2 \ldots n \ldots k_N}\right|^2$$

Damit kann kein Teilsystem unabhängig von einem anderen betrachtet oder beobachtet werden. In einem Quantensystem ist alles mit allem verwoben, wenn nur die kleinste Wechselwirkung besteht. Und diese Wechselwirkung gibt es zum Beispiel zwischen allen elektronischen Wirkungen des Universums. Und diese elektronischen Wirkungen beeinflussen alle chaotischen Prozesse in der Natur, zum Beispiel das Wettergeschehen oder unsere Gehirnfunktionen.