12. Mensch Sein

Mathematischer Anhang - Das Gödel-Theorem

Gödel konnte den mathematischen Beweis führen, daß es Aussagen gibt, die Wahr sind aber, nicht mathematisch bewiesen werden können

Propositionale Funktionen, die sich auf sich selber beziehen

die Argumente von Gödel sind teilweise sehr detailliert und kompliziert - die zentrale Idee ist jedoch relativ einfach

Propositionale Funktionen *P*

wir betrachten ein System von mathematischen Aussagen $P_n(w)$ - n gibt die Nummer der Aussage an und w beschreibt, worauf diese Aussage angewendet wird

Beispiel

$$P_1(w) = \sim \exists(x, y, z)\left[(x+1)^{w+3} + (y+1)^{w+3} = (z+1)^{w+3}\right] \quad \forall x, y, z, w \in \aleph \tag{12-1}$$

P_1 ist hier die Aussage von Fermat, dass es keine ganze Potenz $w>3$ gibt, so dass diese Potenz die Summe gleicher Potenzen ist (nicht angewendet werden kann die Aussage auf $3^2 + 4^2 = 5^2$)

Beweise

zu obigem System von mathematischen Aussagen gibt es Beweise, die ebenfalls durchnumeriert sein sollen - Π_n soll für den n'ten Beweis im Aussagensystem stehen

Aussagen, die sich auf sich selber beziehen

wir betrachten nun die spezielle propositionale Funktion

$$\sim \exists x\left[\Pi_x \text{ beweist } P_w(w)\right] \tag{12-2}$$

in den eckigen Klammern steht, daß im mathematischen Aussagensystem der x'te Beweis die Aussage P_w bezogen auf w selbst beweist - außerhalb der eckigen Klammer steht, daß es keinen entsprechenden Beweis gibt - es gibt also keinen Beweis für $P_w(w)$

diese Aussage soll die Nummer k im mathematischen Aussagensystem erhalten, also

$$\sim \exists x\left[\Pi_x \text{ beweist } P_w(w)\right] = P_k(w) \tag{12-3}$$

nun untersuchen wir, was für den speziellen w-Wert $w=k$ passiert - wir erhalten

$$\sim \exists x\left[\Pi_x \text{ beweist } P_k(k)\right] = P_k(k) \tag{12-4}$$

die propositionale Funktionen $P_k(k)$ ist eine perfekte, wohl-definierte und nach den vorausgehenden Annahmen auch richtige arithmetische Aussage - kann sie bewiesen werden?

die Antwort ist nein - das ist ja entsprechend Gleichung (12-4) gerade die Aussage von $P_k(k)$: es gibt keinen Beweis für $P_k(k)$ - obwohl $P_k(k)$ wohl-definiert und richtig ist, gibt es innerhalb des Aussagensystems keinen Beweis dafür

ein möglicher Ausweg für die Mathematik ist es, diese Aussage $P_k(k)$ als zusätzliches Axiom mit in das System der mathematischen Aussagen mit aufzunehmen - dadurch wird das System vergrößert und es entstehen neue Aussagen, die wieder nicht bewiesen werden können - geht man so vor, wird das System unendlich groß und damit nicht abgeschlossen

Einsicht

will man mit endlichen mathematischen Aussagensystemen arbeiten, gibt es nur die Möglichkeit, Einsicht von außen in das System mit zuzulassen, was immer das auch ist.