

3.2 Volumenintegrale

Wenn man Systeme von vielen Massenpunkten m_α an Positionen \vec{r}_α beschreiben will, so muss z.B. die Gesamtmasse M des Systems, den Vektor des Schwerpunktes \vec{R} oder aber auch die Kraft \vec{F} ausgerechnet werden, die durch die Gravitationswechselwirkung all dieser Teilchen auf einen weiteren Massenpunkt μ an der Position \vec{r} ausgeübt wird. Es treten also Summen auf vom folgenden Typ auf:

$$M = \sum_{\alpha=1}^N m_\alpha$$

$$\vec{R} = \frac{\sum_{\alpha=1}^N m_\alpha \vec{r}_\alpha}{M} \quad (3.28)$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\gamma \mu m_\alpha}{|\vec{r} - \vec{r}_\alpha|^3} (\vec{r} - \vec{r}_\alpha) \quad (3.29)$$

Diese Summen kann man leicht ausführen, wenn es sich um $N = 3$ oder $N = 10$ Massenpunkte handelt. Es wird jedoch unmöglich, wenn es sich bei den Massenpunkte z.B. um die Moleküle H_2O in einem Wassertropfen handelt. In einem Mol Wasser, das sind 18 Gramm Wasser, befinden sich nämlich

$$N = N_L \approx 6 \cdot 10^{23}$$

Moleküle, wobei N_L die **Loschmidtsche Zahl** bezeichnet. Wenn man einen modernen Computer benutzen würde, der in einer Sekunde etwa 1 Millionen Summanden in der Summe (3.28) aufsummieren könnte, so wäre dieser Computer immerhin etwa $1.9 \cdot 10^{10}$ Jahre beschäftigt. Das ist erheblich länger als das Alter des Universums, der Computer wäre also sicher kaputt bevor er so eine einfache Aufgabe *Berechne den Schwerpunkt eine Menge von 18 g Wasser* erfüllt hätte. Wir müssen uns also nach einer anderen Rechen-technik umsehen.

Wir könnten z.B. das uns interessierende Volumen V in k kleine Untervolumina der Größe ΔV einteilen (mit $V = k\Delta V$). Dieser Teilvolumina könnten z.B. Quader sein mit einer Kantenlänge von Δx , Δy und Δz in x -, y - beziehungsweise der z -Richtung sein. Es gilt also

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z .$$

Man kann dann bestimmen, wie viele der Massenpunkte m_α typischerweise in dem Teilvolumen ΔV an der Stelle \vec{r}_i befinden (siehe auch Abb. 3.8). Wir definieren also eine Teilchendichte mit

$$\rho(\vec{r}_i) = \frac{n_i}{\Delta V} ,$$

wobei n_i die Zahl der Teilchen in diesem Volumen bezeichnet. Damit könnte man nun

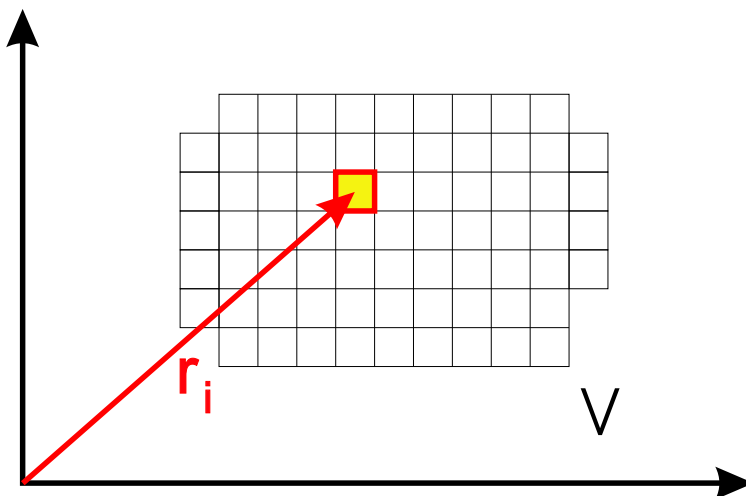


Abbildung 3.8: Teilvolumina ΔV zur Berechnung z.B. des Schwerpunktsvektors \vec{R} . Hier wird speziell der Beitrag eines Elementes i an der Position \vec{r}_i betrachtet.

berechnen

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{i=1}^k \rho(\vec{r}_i) \Delta V, \\
 M &= m \sum_{i=1}^k \rho(\vec{r}_i) \Delta V, \\
 \vec{R} &= \frac{m}{M} \sum_{i=1}^k \vec{r}_i \rho(\vec{r}_i) \Delta V.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Dabei haben wir angenommen, dass die Massen aller Teilchen gleich sind $m_\alpha = m$. In diesem Fall ist es für viele Fälle geschickter, an Stelle der Teilchendichte die Massendichte

$$\tilde{\rho}(\vec{r}_i) = m\rho(\vec{r}_i) = \frac{mn_i}{\Delta V},$$

einzuführen. Diese ist auch in der Regel einfach zu bestimmen aus dem Quotienten Masse in einem Volumen ΔV dividiert durch dieses Volumen.

Eine solche Aufteilung oder Diskretisierung des Volumens ist aber problematisch, wenn sich die Teilchendichte sehr stark mit dem Ort \vec{r}_i ändert. In diesem Fall müsste man sehr viele und sehr kleine Teilvolumina definieren, die Kantenlängen würden infinitesimal klein:

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \quad \rightarrow \quad dV = dx dy dz$$

Aus der Summe wird dann ein Integral über die drei Raumrichtungen x , y und z wie z.B. bei der Summe in (3.30):

$$\sum_{i=1}^k \rho(\vec{r}_i) \Delta V \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}) dz \right] dy \right] dx.$$

Als ein erstes einfaches Beispiel für die Berechnung eines solchen Volumenintegrals betrachten wir den Fall, dass die Massenteilchen auf das Volumen eines Quaders mit den Kantenlängen a , b und c beschränkt sind. Die Funktion der Teilchendichte ist also definiert durch

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit können wir das Integral aus (3.2) berechnen:

$$\begin{aligned} \iiint \rho dV &= \int_0^a \left[\int_0^b \left[\int_0^c \rho_0 dz \right] dy \right] dx \\ &= \int_0^a \left[\int_0^b \rho_0 c dy \right] dx \\ &= \rho_0 abc = \rho_0 V \end{aligned}$$

Die Teilchenzahl ergibt sich also als Produkt der konstanten Teilchenzahldichte ρ und dem Volumen V des Quaders, ein Ergebnis, das offensichtlich richtig ist. Ganz ähnlich können wir nun auch den Vektor des Schwerpunktes dieses Quaders berechnen. Als Beispiel betrachten wir hier die Berechnung der x -Komponente dieses Schwerpunktvektors und berechnen dazu:

$$\begin{aligned} m \iiint x \rho dV &= m \int_0^a \left[x \int_0^b \left[\int_0^c \rho_0 dz \right] dy \right] dx \\ &= m \int_0^a x \rho_0 b c dx \\ &= m \rho_0 \frac{a^2}{2} b c = m \rho_0 V \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Entsprechende Ergebnisse erhält man für die beiden anderen Komponenten, so dass der Vektor des Schwerpunktes gegeben ist durch

$$\vec{R} = \frac{m}{m \rho_0 V} \iiint \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rho dV = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

ein Ergebnis, das natürlich auch unseren Erwartungen entspricht.

Als ein weiteres Beispiel betrachten wir eine Teilchenverteilung, die eine konstante Dichte innerhalb des Volumens eines Zylinders besitzt. In diesem Fall ergibt sich

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0 & \text{für } 0 \leq z \leq c, 0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen wir das Volumenintegral für diese Dichteverteilung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \iiint \rho dV &= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^c dz \rho_0 \\
 &= c\rho_0 \int_{-R}^R dx 2\sqrt{R^2-x^2} \\
 &= 2c\rho_0 R^2 \int_{-1}^1 dx' \sqrt{1-x'^2} \\
 &= 2c\rho_0 R^2 \left[\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin(x) \right]_{-1}^1 \\
 &= \rho_0 c \pi R^2 = \rho_0 V
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

wobei wir $c\pi R^2$ als Volumen des Zylinders V identifiziert haben. Einfacher kann man diese Rechnung in Zylinderkoordinaten durchführen. Dazu müssen wir allerdings zunächst das Volumenelement dV in Zylinderkoordinaten bestimmen. Dies ergibt sich aus dem Produkt der 3 Vektoren

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial i} di$$

wo die Ableitung des Ortsvektors \vec{r} nach jeweils einer der 3 Koordinaten berechnet wird (die beiden anderen Koordinaten werden festgehalten) und das Ergebnis dann mit dem Differenzial dieser koordinate di multipliziert wird. Als Beispiel betrachten wir für den Fall der Zylinderkoordinaten, wo ja der Ortsvektor dargestellt wird durch

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

den Vektor $d\vec{r}_\varphi$, der ja die infinitesimale Änderung des Ortsvektors beschreibt, wenn sich der Azimuthwinkel φ infinitesimal ändert. Dieser berechnet sich nach (3.2) für $i = \varphi$ zu

$$d\vec{r}_\varphi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = r \hat{e}_\varphi d\varphi.$$

Dabei haben wir wieder auf die Einheitsvektoren \hat{e}_φ der Zylinderkoordinaten zurückgegriffe, die wir ja bereits bei der Definition der Zylinderkoordinaten eingeführt hatten. Entsprechende Rechnungen für die anderen beiden Vektoren $d\vec{r}_i$ liefern:

$$d\vec{r}_r = \hat{e}_r dr \quad \text{und} \quad d\vec{r}_z = \hat{e}_z dz.$$

Alle drei Vektoren stehen also senkrecht aufeinander. Deshalb ergibt sich für das Volumenelement in Zylinderkoordinaten

$$dV = r dr d\varphi dz$$

Bevor wir dieses Volumenelement in Rechnungen benutzen, zunächst noch 2 Anmerkungen zum Faktor r in diesem Volumenelement. Einerseits ist natürlich klar, dass ein Volumenelement $dr d\varphi dz$ nicht richtig sein kann, da ein solches Element lediglich die Dimension

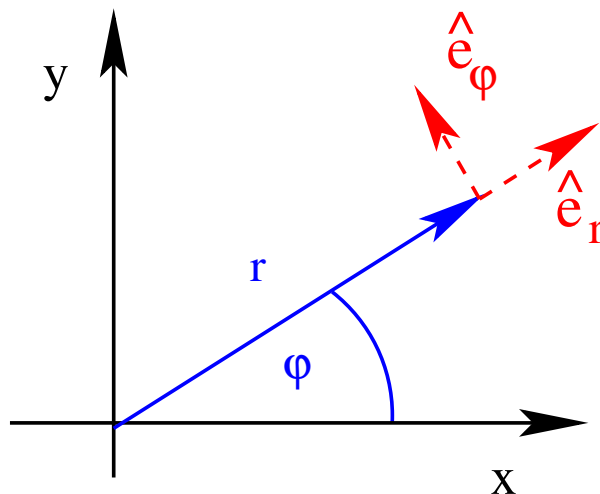


Abbildung 3.9: Darstellung eines Vektor in Zylinderkoordinaten und zugehörige Basisvektoren. Diskussion im Text.

einer Länge zum Quadrat (also z.B. Meter zum Quadrat m^2) besäße, was aber die Dimension einer Fläche und nicht eines Volumens wäre (Winkel φ werden ja in dimensionslosen Einheiten gemessen). Der Faktor r in (3.2) “sorgt” also dafür, dass dV die richtige Dimension (m^3) eines Volumens besitzt. Diesen Faktor r können wir aber auch geometrisch verstehen. Dazu betrachten wir die Skizze der Abb. 3.9. Es ist klar, dass eine Verschiebung des Ortes \vec{r} durch eine Vergrößerung des Winkels φ in Richtung des Basisvektors \hat{e}_φ erfolgt. Die Länge der Strecke, die die Spitze des Ortsvektors dabei zurücklegt ist proportional zu der Änderung des Winkels $d\varphi$ aber auch proportional zum Abstand vom Koordinatenursprung r . Insgesamt ergibt das Produkt dr mal $rd\varphi$ eine infinitesimale Fläche der Form, wie sie durch die gestrichelten Vektoren in Abb. 3.9 angedeutet ist. Multipliziert man diese Fläche noch mit einem Vektorelement dz senkrecht zur dargestellten Ebene, so ergibt sich das gesamte Volumenelement dV .

Wir diskutieren hier nur die Rechenregeln für Volumenelemente im 3-dimensionalen Raum für den Fall, dass die Basisvektoren der betrachteten Koordinatensysteme \hat{e}_i ein orthogonales Basissystem bilden. Allgemein ergeben sich Volumenelemente bei der Transformation von den kartesischen Koordinaten x, y, z auf Koordinaten u, v, w durch die Beziehung

$$dx dy dz = \left| \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \right| du dv dw .$$

Dabei steht der Ausdruck zwischen den Betragstrichen für den Betrag der sogenannten Jakobideterminante.⁴ Wir werden dies später in dieser Vorlesung behandeln.

Mit Hilfe der Zylinderkoordinaten und dem zugehörigen Volumenelement aus (3.2) kann man das Volumenintegral aus (3.31) einfacher berechnen mit

$$\begin{aligned} \iiint \rho dV &= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^c dz \rho_0 \\ &= \rho_0 c 2\pi \frac{1}{2} R^2 = \rho_0 V , \end{aligned} \tag{3.32}$$

⁴siehe z.B.: H. Fischer, H. Kaul: *Mathematik für Physiker I*, 23, oder Bronstein - Semendjajew: *Taschenbuch der Mathematik*, 3.1.11

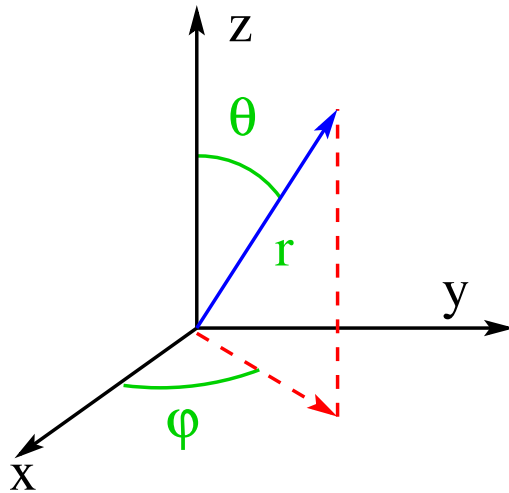


Abbildung 3.10: Darstellung eines Vektor in Kugelkoordinaten.

was natürlich das identische Ergebnis wie in (3.31) ist.

In vielen Anwendungen sind jedoch die Kugelkoordinaten noch geeigneter als die hier diskutierten Zylinderkoordinaten. Die geometrische Bedeutung der Winkelvariablen ϑ (der Winkel zwischen dem Vektor \vec{r} und der z -Achse) und φ (der Winkel, den die Projektion von \vec{r} auf die xy -Ebene mit der x -Achse bildet) ist in Abb. 3.10 dargestellt.

Daraus ergibt sich für die Darstellung des Vektors in Kugelkoordinaten die Form

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Für eine vollständige Abdeckung des Raumes überstreicht der Winkel ϑ den Bereich $[0, \pi]$ und der Winkel φ nimmt Werte aus $[0, 2\pi]$ an. Mit diesen Definitionen und den oben skizzierten Rechenregeln berechnet sich das Volumenelement in Kugelkoordinaten zu

$$dV = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi,$$

und ein Volumenintegral schreibt etwa über eine Kugel mit dem Radius R schreibt sich:

$$\int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

In diesem dreifachen Integral betrachten wir speziell die Integration über den Winkel ϑ und definieren

$$\chi = \cos \vartheta.$$

Daraus ergibt sich

$$d\chi = \frac{d\chi}{d\vartheta} d\vartheta = -\sin \vartheta d\vartheta$$

Das zweite Integral aus (3.2) kann also umgeschrieben werden auf die Form

$$\int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = -\int_{\cos(0)}^{\cos \pi} d\chi = \int_{-1}^1 d\chi$$

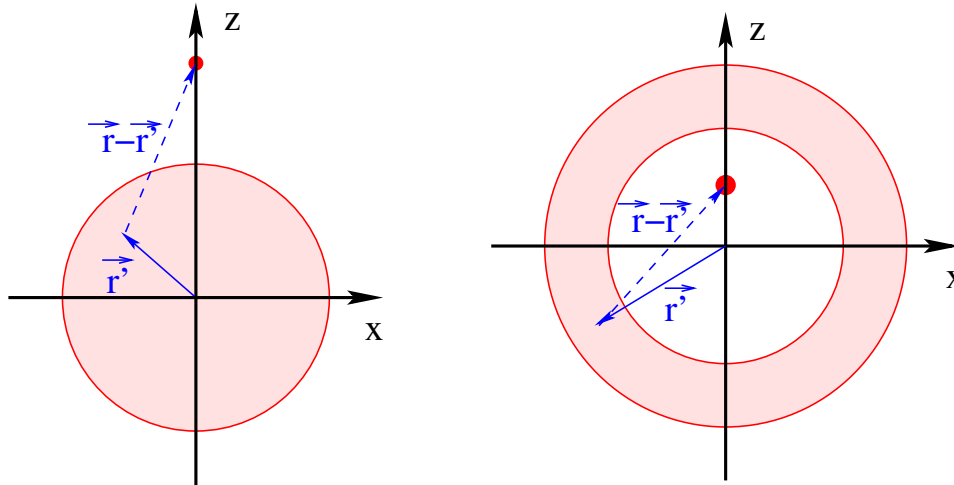


Abbildung 3.11: Berechnung des Gravitationspotenzials einer kugelförmigen Massenverteilung auf ein Teilchen auf der z -Achse (links) und für ein Teilchen innerhalb einer Massenschale (rechtes Teilbild).

womit das Volumenintegral von (3.2) die Gestalt annimmt

$$\int_0^R r^2 dr \int_{-1}^1 d\chi \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

was für viele Rechnungen eine sehr geeignete Darstellung ist. Das einfachste Beispiel ist es wohl, das Volumen der Kugel zu berechnen mit

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_{-1}^1 d\chi \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 \cdot 2\pi.$$

Als eine erste physikalisch motivierte Anwendung betrachten wir jetzt die Berechnung des Gravitationspotenzials einer ausgedehnten kugelförmigen Masse mit Radius R und konstanter Dichte auf eine Testmasse μ , die ausserhalb dieser Masse an der Position \vec{r} liegt (siehe linkes Teilbild der Abb. 3.11). Dies ist ein Modell z.B. für die Anziehung, die die Erde (die ja sicher keine Punktmasse ist) auf den Probekörper μ ausübt. Dazu betrachten wir zunächst einmal den Beitrag, den ein infinitesimales Volumenelement dV' an der Position \vec{r}' dazu leistet. Dieser Beitrag ist gegeben durch

$$\delta U(\vec{r}) = -\frac{\gamma \mu \tilde{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Dabei steht $\tilde{\rho}(\vec{r}')$ für die Massendichte an der Stelle \vec{r}' , so dass $\tilde{\rho} dV'$ gleich der Masse im Volumen dV' ist und γ bezeichnet die Newtonsche Gravitationskonstante. Berechnet man nämlich z.B. die x -Komponente der zu diesem Potenzial zugehörige Kraft

$$\begin{aligned} \delta F_x(\vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\gamma \mu \tilde{\rho} dV'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \\ &= -\frac{\gamma \mu \tilde{\rho} dV'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}^3} (x-x') \end{aligned}$$

Entsprechendes gilt für die y - und die z -Komponente, so dass insgesamt

$$\delta\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\delta U(\vec{r}) = -\frac{\gamma\mu\tilde{\rho}dV'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}(\vec{r}-\vec{r}')$$

also eine Kraft entsteht, eine Anziehung des Punktteilchens μ zur Teilmasse $\rho dV'$ an der Position \vec{r}' . Addieren wir nun all diese infinitesimalen Beiträge δU der Volumenelemente dV' in (3.2) auf, so ergibt sich das gesamte Potenzial durch das Volumenintegral

$$\begin{aligned} U(\vec{r}) &= -\int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 d\chi' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\gamma\mu\tilde{\rho}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\ &= -\int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 d\chi' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\gamma\mu\tilde{\rho}(\vec{r}')}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\chi'}}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

In der zweiten Zeile dieser Gleichung nehmen wir an, dass das Koordinatensystem so ausgerichtet ist, dass die Testmasse μ auf der z -Achse liegt. Damit wird der Kosinus des Winkels zwischen \vec{r} und \vec{r}' gleich der Integrationsvariablen $\chi' = \cos(\vartheta')$. Das Integral über den Azimutwinkel φ liefert den Faktor 2π . Ausserdem benutzen wir

$$\int_{-1}^1 d\chi' \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\chi'}} = -\frac{\sqrt{(r-r')^2} - \sqrt{(r+r')^2}}{rr'},$$

Für den hier relevanten Fall $r > r'$ ist dieses Integral gerade $2/r$. Damit ergibt sich insgesamt für das Integral in (3.33)

$$U(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{r}\gamma\mu\tilde{\rho} \int_0^R r'^2 dr' = -\gamma\mu\tilde{\rho} \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{1}{r} = -\frac{\gamma\mu M}{r}$$

also gerade das Potenzial einer Punktmasse der Masse M (gleich dem Produkt aus Massendichte $\tilde{\rho}$ und dem Volumen der Kugel mit Radius R) im Koordinatenursprung also im Zentrum der kugelförmigen Masse. Damit haben wir also jetzt bestätigt, dass wir die Gravitationsanziehung der Erde durch das der entsprechenden Punktmasse im Zentrum der Erde beschreiben können, so lange wir uns auf Teilchen beschränken, die sich ausserhalb des Erdradius bewegen.

Welche Gravitationskraft spüren aber Teilchen, die sich im Inneren der Erde befinden. Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir nun die Berechnung des Gravitationspotenzials einer kugelförmigen Massenschale auf das Teilchen μ , das sich im inneren Hohlraum dieser Massenschale befindet (rechtes Teilbild von Abb. 3.11). Auch in diesem Fall betrachten wir das gleiche Volumenintegral, wir müssen aber die Integration über die radiale Koordinate r' auf den Bereich zwischen dem Radius der inneren Hohlkugel R_i und dem Aussenradius R_a umschreiben. Ausserdem müssen wir natürlich für das Integral (3.2) annehmen, dass $r' > r$ ist, was zu einem Ergebnis für dieses Integral von $2/r'$ führt. Damit erhalten wir also in diesem Fall ein Potenzial der Form

$$U(\vec{r}) = -4\pi\gamma\mu\tilde{\rho} \int_{R_i}^{R_a} \frac{r'^2}{r'} dr'.$$

Es ist nicht erforderlich dieses Integral weiter auszuwerten. Wir sehen, dass der Wert nicht von der Position \vec{r} des Teilchens μ abhängt. Die Kraft, berechnet als negativer

Gradient des Potentials ist also identisch Null. Die Beiträge der verschiedenen Teilmassen der Kugelschale zur Gesamtkraft auf die Testmasse im Inneren heben sich also gerade gegenseitig auf.

Betrachten wir nun also den allgemeinen Fall, dass sich unser Testteilchen μ an einer beliebigen Position in einer Massenverteilung $\tilde{\rho}$ mit kugelförmiger Symmetrie befindet. Die Bereiche der Massenverteilung, die einen Abstand vom Zentrum dieser Kugel haben, die größer ist als der Abstand r des Teilchens μ tragen, wie wir gerade gezeigt haben, nicht zur Gravitationskraft bei. Der Anteil der Massenverteilung, der innerhalb der Kugel mit dem Radius r liegt, wir bezeichnen ihn mit der Massenfunktion $M(r)$ übt eine Kraft aus, als ob diese Masse $M(r)$ im Zentrum der Kugel, also im Koordinatenursprung läge. Wir erhalten also mit diesen Bezeichnungen für die resultierende Kraft

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\gamma\mu M(r)}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

Nimmt man an, dass unser ausgedehnter Körper eine konstante Dichte für $0 \leq r' \leq R$ besitzt, die ausserhalb des Radius R direkt auf Null absinkt, so ergibt sich für $M(r)$

$$M(r) = \begin{cases} \frac{M r^3}{R^3} & \text{für } r \leq R \\ M & \text{für } r > R \end{cases}$$

Damit ergibt sich also für den Betrag der Kraft als Funktion von r

$$F(r) = \begin{cases} \frac{\gamma\mu M}{R^3} r & \text{für } r \leq R \\ \frac{\gamma\mu M}{r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

Eine interessante Anwendung ergibt sich, wenn wir annehmen, dass die Massenverteilung einer Galaxie kugelförmig ist. Sterne in dieser Galaxie würden also durch die Anziehung ihrer Mitsterne, eine anziehende Kraft auf das Zentrum der Galaxie von der Form (3.2) spüren. Dabei ist r der Abstand des jeweiligen Sterns von diesem Zentrum. Ist die Galaxie in einem stabilen Zustand, so werden sich die Sterne auf Ellipsen um das Zentrum bewegen (genau so wie die Planeten um die Sonne). Wir wollen der Einfachheit halber annehmen, dass es sich hier um Kreisbahnen handelt, bei denen die Anziehung der Gravitation durch die Zentripetalkraft kompensiert wird:

$$\mu r \dot{\varphi}^2 = \gamma\mu \frac{M(r)}{r^2}.$$

Für die Geschwindigkeit der Sterne auf ihrer Bahn ergibt sich also

$$v^2 = r^2 \dot{\varphi}^2 = \gamma \frac{M(r)}{r}.$$

Wäre die Massendichte homogen, so sollte diese Geschwindigkeit proportional zu r ansteigen, am Rande der Galaxie aber dann mit $1/\sqrt{r}$ abfallen. Man beobachtet auch den linearen Anstieg im Inneren der Galaxie, stellt aber fest, dass im Aussenbereich die Geschwindigkeit einen konstanten Wert v annimmt.

Diese Beobachtung wird als ein Indiz (neben anderen) für die Existenz der sogenannten dunklen Materie angenommen. Danach besteht der überwiegende Anteil der Materie, die

Gravitationskräfte auf Sterne und Galaxien ausübt, nicht aus Materie von uns bekannter Art (Materie von Sonnen, Planeten, ausgebrannte Sonnen, die zu schwarzen Löchern kollabiert sind ...) sondern eben aus dieser dunklen Materie, die sich nur durch die Gravitation bemerkbar macht. Ein Halo aus solch dunkler Materie um die leuchtenden Sterne einer Galaxie könnte diese Daten erklären.

Alternativ kann man diese Geschwindigkeiten auch mit einer modifizierten Newtonschen Gleichung beschreiben. Diese Parametrisierung hat den schönen Namen MOND für MODified Newtonian Dynamics⁵. Man nimmt dazu an, dass für sehr schwache Kräfte (unterhalb einer Minimalkraft) die bekannte Beziehung $F = ma$ ersetzt werden muss durch

$$F = \beta ma^2.$$

Die Kraft ist also in diesem Fall proportional zur Beschleunigung a zum Quadrat. Für die Sterne am Rande einer Galaxie sollte die Anziehungskraft so gering sein, dass (3.2) anzuwenden ist. Aus der Beziehung (3.2) würde also

$$\mu\beta r^2 \dot{\phi}^4 = \gamma\mu \frac{M(r)}{r^2}.$$

was das Geschwindigkeitsverhalten erklären könnte. Der Ansatz (3.2) ist natürlich nur ein Versuch einer Parametrisierung eines beobachteten Effektes, keine wirkliche Theorie, mit der auch ganz andere Phänomene beschrieben würden. Vielleicht verbirgt sich aber hinter dieser Parametrisierung eine Theorie, die die Forderung nach der Existenz der dunklen Materie überflüssig machen könnte

⁵Eine allgemeinverständliche Darstellung dieser MOND Beschreibung findet sich in der Zeitschrift *Spektrum der Wissenschaften*, Oktober 2002