

Kapitel 7

Schwingungen und Wellen

7.1 Überlagerung von Schwingungen, Fourier Zerlegung

Im Abschnitt über die Bewegungen einzelner Teilchen haben wir uns sehr intensiv mit den **Harmonischen Schwingungen** beschäftigt, die auftraten, wenn einzelne Teilchen kleine Schwingungen um die Position ausführten, bei der das Potenzial ein Minimum besitzt. In diesem Fall ergibt sich in erster Näherung eine Rückstellkraft, die linear mit der Auslenkung x der Masse m aus dem Punkt minimaler potenzieller Energie anwächst. Diese führte zu einer Newtonschen Bewegungsgleichung, die auf die Form

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) = -\frac{K}{m}x(t), \quad (7.1)$$

gebracht werden konnte. Dabei steht K für die Stärke der Rückstellkraft. Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung besitzt zwei voneinander unabhängige Lösungen

$$x_1(t) = \cos(\omega t) \quad \text{und} \quad x_2(t) = \sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}},$$

sodass man die allgemeine Lösung schreiben kann in der Form

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (7.2)$$

Die Konstanten A und B können z.B. durch die Anfangsbedingungen $x(t=0)$ und $\dot{x}(t=0)$ festgelegt werden. Alternativ zu den Lösungen $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ kann man auch die komplexwertigen Exponentialfunktionen als unabhängige Lösungen heranziehen und die allgemeine Lösung darstellen durch

$$x(t) = \alpha e^{i\omega t} + \beta e^{-i\omega t}, \quad (7.3)$$

wobei die komplexen Parameter α und β so zu wählen sind, dass die reellwertigen Anfangsbedingungen reproduziert werden. Wir bezeichnen solche Bewegungen, bei denen die Auslenkungen mit einer reinen Kosinus- oder Sinusfunktion beschrieben werden als Harmonische Schwingungen (siehe Abb. 7.1). Diese Bezeichnung gilt auch, wenn andere

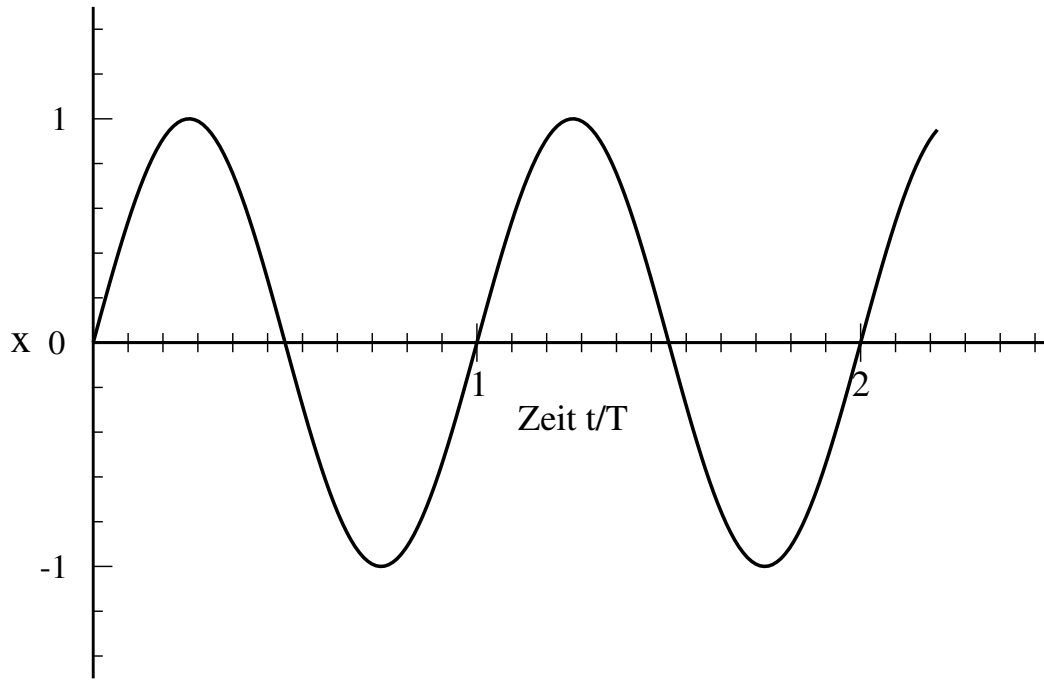


Abbildung 7.1: *Graphische Darstellung einer Harmonischen Schwingung*

physikalische Größen sich so verhalten, dass sie als Funktion der Zeit mit einer Kosinus- oder Sinusfunktion mit einer festen Winkelgeschwindigkeit ω beschrieben werden. Als ein Beispiel für solche Harmonische Schwingungen wollen wir an dieser Stelle den Schall (hier ändert sich der Druck als Funktion der Zeit) und elektromagnetische Schwingungen, bei denen sich unter anderem die Stärke des elektrischen Feldes als Funktion der Zeit ändert, erwähnen. Weitere Beispiele werden wir später in diesem Kapitel betrachten.

Wir können die Schwingung (7.3) auch umschreiben auf die Form

$$x(t) = a \operatorname{Real} (e^{i(\omega t + \delta)}) = a \cos(\omega t + \delta) \quad (7.4)$$

Eine solche Harmonische Schwingung ist also definiert durch die Amplitude a die Phasenverschiebung δ und die Winkelgeschwindigkeit ω . Diese Winkelgeschwindigkeit drückt man auch häufig aus durch die Frequenz ν oder die Schwingungsdauer T , das ist die Zeit, die verstreicht bis das Argument der Kosinusfunktion eine volle Periode 2π durchlaufen hat. Diese Größen sind zueinander definiert durch

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (7.5)$$

Was ergibt sich, wenn man mehrere Harmonische Schwingungen aufaddiert, man nennt dies auch eine Überlagerung von Schwingungen. Wir wollen dazu zunächst den Fall betrachten, dass wir nur zwei Schwingungen mit gleicher Amplitude a und 2 leicht unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten $\omega_0 - \delta\omega$ bzw. $\omega_0 + \delta\omega$ haben. Die Überlagerung berechnet sich am leichtesten durch Aufaddieren der Schwingungen und ergibt

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos((\omega_0 - \delta\omega)t) + a \cos((\omega_0 + \delta\omega)t) \\ &= 2a \sin(\delta\omega t) \sin(\omega_0 t). \end{aligned} \quad (7.6)$$

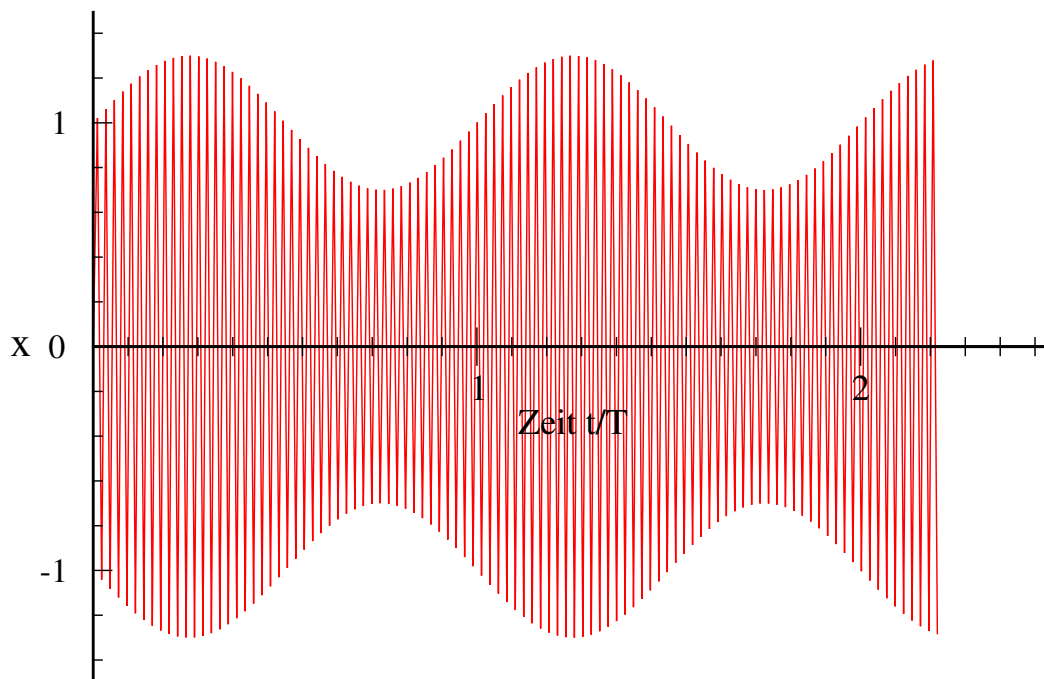


Abbildung 7.2: *Grundschiwingung mit Amplitudenmodulation.*

Dies entspricht also einer Schwingung der Grundwinkelgeschwindigkeit ω_0 deren Amplitude mit der Zeit variiert und zwar mit einer Winkelgeschwindigkeit von $\delta\omega$, die sehr viel kleiner sein kann als ω_0 . Man spricht von einer Schwebung.

Eine Grundschiwingung mit der Trägerfrequenz $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ und einer Amplitude, die mit einer geringeren Frequenz moduliert ist, ist in Abb. 7.2 dargestellt. Solche amplitudenmodulierte Schwingungen ergeben sich durch die Überlagerung von Schwingungen mit leicht unterschiedlichen Frequenzen. Ein Anwendungsbeispiel für solche Schwingungsüberlagerungen findet man etwa in der Übertragung von Schallwellen mit Radiowellen. Die Trägerfrequenz ν_0 für eine Übertragung im Ultra - Kurz - Wellen (UKW) Bereich liegt z.B. bei 94 MHz, also 94 Millionen Schwingungen des elektromagnetischen Feldes pro Sekunde. Hörbare Schallwellen haben eine Frequenz $\delta\nu$ von 10 Hz bis etwa 20 KHz. Zur Übertragung solcher Schallwellen benötigt man also Überlagerungen von Radiowellen mit $\nu = \nu_0 \pm \delta\nu$, also nicht nur eine einzige Fequenz sonder ein ganzes Frequenzband.

7.1.1 Fourier Reihen

Nun beobachtet man aber in der Natur sehr viele verschiedene periodische Vorgänge und zwar nicht nur solche, die durch eine Harmonische Schwingung dargestellt werden. Wir werden im folgenden sehen, dass sich solche periodischen Vorgänge stets durch eine Überlagerung von Harmonischen Schwingungen darstellen lassen. Man nennt diese Darstellung einer periodischen Funktion $f(x)$ die **Fourier Reihe** dieser Funktion.

Um diese Fourier Reihe zu spezifizieren, definieren wir zunächst einmal, was wir unter einer periodischen Funktion f verstehen. Wir betrachten dazu eine reellwertige Funktion f einer Variablen x , die im Intervall $-L \leq x \leq L$ definiert sein soll mit der Nebenbedingung,

dass $f(-L) = f(L)$. Die Länge des Definitionsintervalls, $2L$, heisst die Periodenlänge der Funktion. Eine solche Funktion kann dann periodisch ergänzt werden für beliebige Argumente durch die Definition

$$f(x) = f(x + 2nL) \quad \text{für } -L \leq x \leq L \quad \text{und } n \text{ eine ganze Zahl.}$$

Die Fourier Reihe zur Darstellung dieser Funktion lässt sich dann schreiben in der Form

$$f(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2L}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{L}} \cos(k_n x) + b_n \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(k_n x). \quad (7.7)$$

Dabei sind die a_n und b_n Koeffizienten, also Zahlen, die für die Funktion $f(x)$ charakteristisch sind und über deren Bestimmung noch zu reden sein wird. Die Wellenzahlen k_n sind definiert durch

$$k_n = \frac{n\pi}{L}. \quad (7.8)$$

Damit sind die Funktionen $\cos(k_n x)$ und $\sin(k_n x)$ periodische Funktionen auf dem Intervall $[-L, L]$. Die Gleichung (7.7) sagt aus, dass jede reellwertige periodische Funktion f durch die entsprechenden periodischen Kosinus- und Sinusfunktionen dargestellt werden kann. Diese periodischen Funktionen bilden nämlich einen Vektorraum. Dies bedeutet zunächst einmal, dass jede Überlagerung von periodischen Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ in der Form

$$f(x) = a f_1(x) + b f_2(x),$$

mit a und b beliebigen reellen Zahlen, selbst wieder ein Element dieses Vektorraumes ist, wovon man sich leicht überzeugen kann. Ausserdem sind die anderen Voraussetzungen für einen solchen Vektorraum erfüllt.¹

Die Kosinus- und Sinusfunktionen bilden dann eine Basis in diesem Vektorraum und wir können (7.7) umschreiben auf die Form

$$|f\rangle = a_0 |e_0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} a_n |e_n\rangle + b_n |\tilde{e}_n\rangle. \quad (7.9)$$

In dieser Schreibweise haben wir also die Elemente des Vektorraumes identifiziert mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow |f\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2L}} &\rightarrow |e_0\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{L}} \cos(k_n x) &\rightarrow |e_n\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{L}} \sin(k_n x) &\rightarrow |\tilde{e}_n\rangle, \end{aligned} \quad (7.10)$$

¹siehe z.B. Kapitel II aus H. Fischer und H. Kaul: Mathematik für Physiker I, Teubner Taschenbücher, und die entsprechende Vorlesung Mathematik. Eine ausführliche Diskussion der Fourierreihe aus Sicht der Mathematik findet sich im Kapitel III Paragraph 6 von H. Fischer und H. Kaul: Mathematik für Physiker II.

eine Bezeichnung, die insbesondere in der Quantenmechanik benutzt wird und die wir deshalb an dieser Stelle auch schon mal einführen wollen. Diese Basiselemente $|e_n\rangle$ und $|\tilde{e}_n\rangle$ bilden eine Orthonormalbasis. Zum Nachweis müssen wir aber zunächst einmal definieren, wie das Skalarprodukt zweier Vektoren in diesem Vektorraum der periodischen Funktionen gebildet werden soll. Dazu führen wir die Definition ein, dass das Skalarprodukt zweier Elemente $|f\rangle$ und $|g\rangle$, beziehungsweise der entsprechenden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ berechnet werden soll durch

$$\langle f|g\rangle := \int_{-L}^L dx f(x) g(x). \quad (7.11)$$

Man muss sich davon überzeugen, dass diese Definitionen die Bedingungen an ein Skalarprodukt erfüllt. Insbesondere kann man mit dieser Definition den Abstand zweier Funktionen f und g definieren durch

$$\| |f\rangle - |g\rangle \| = \sqrt{\langle f-g|f-g\rangle}, \quad (7.12)$$

mit

$$\langle f-g|f-g\rangle = \int_{-L}^L dx (f(x) - g(x))^2 \quad (7.13)$$

Dieser Abstand ist also positiv definit und liefert nur dann den Wert Null, wenn die beiden Funktionen f und g identisch sind. Mit dieser Definition können wir uns nun davon überzeugen, dass die in (7.10) aufgeführten Elemente eine Orthonormalbasis darstellen. Es gilt also zum Beispiel

$$\begin{aligned} \langle e_i|e_j\rangle &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \cos(k_i x) \cos(k_j x) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{für } i = j = 0 \\ 2, & \text{für } i = j = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Entsprechende Beziehungen gelten für die anderen Elemente

$$\langle \tilde{e}_i|\tilde{e}_j\rangle \quad \text{und} \quad \langle e_i|\tilde{e}_j\rangle = 0.$$

Wir müssen nun noch die Entwicklungskoeffizienten a_n und b_n des Elementes $|f\rangle$ unseres Vektorraumes nach den Basiszuständen nach (7.9) bestimmen. Wie auch im einfachen Vektorraum der Ortsvektoren geschieht das dadurch, dass wir das Skalarprodukt der zu entwickelnden Funktion mit den einzelnen Elementen der Orthonormalbasis bilden. Es gilt also

$$\begin{aligned} a_0 &= \langle f|e_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L dx f(x), \\ a_n &= \langle f|e_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L dx f(x) \cos(k_n x), \\ b_n &= \langle f|\tilde{e}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_{-L}^L dx f(x) \sin(k_n x). \end{aligned} \quad (7.14)$$

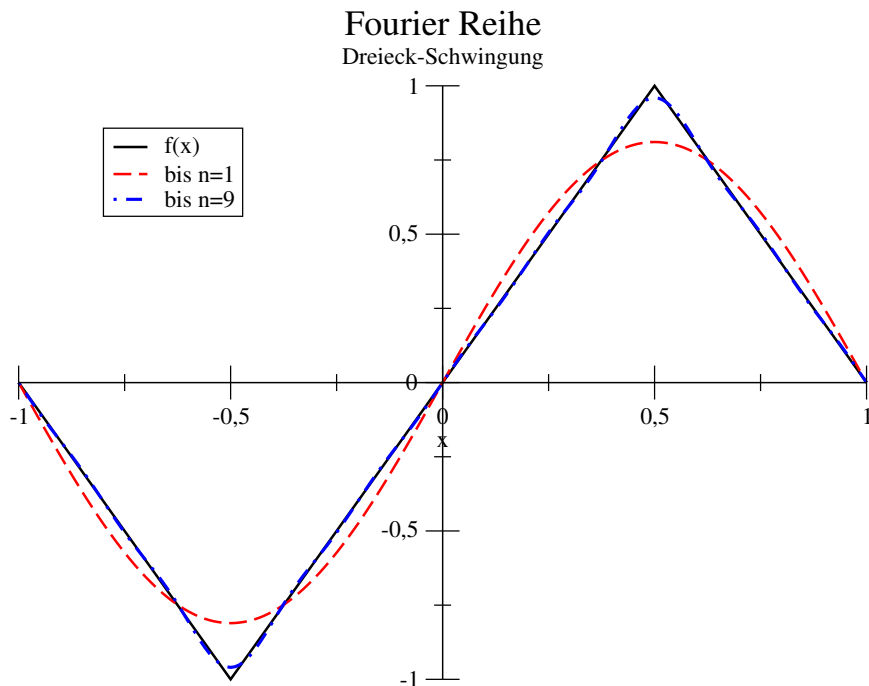


Abbildung 7.3: Dreiecksschwingung und deren Fourier Entwicklung nach (7.15)

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir das Intervall mit $L = 1$ und darauf die Dreiecksfunktion, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -2(x+1) & \text{für } -1 \leq x \leq -0.5 \\ 2x & \text{für } -0.5 \leq x \leq 0.5 \\ 2(1-x) & \text{für } 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

und dargestellt in Abb. 7.3. Für diese Funktion $f(x)$ kann man nun z.B. mit der Hilfe von MAPLE die Entwicklungskoeffizienten nach (7.14) berechnen. Man findet

$$a_0 = a_n = 0 \tag{7.15}$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ (-1)^{\frac{n+3}{2}} \frac{8}{n^2\pi^2} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{7.16}$$

Die Ergebnisse dieser Fourierreihe sind ebenfalls in Abb. 7.3 dargestellt. Wenn man die Fourierreihe (7.7) bei $n = 1$ abbricht, wird die Funktion $f(x)$ durch eine entsprechend normierte Sinusfunktion dargestellt, was einer sehr groben Näherung entspricht. Nimmt man aber alle Terme bis $n = 9$ mit, so kann man das Ergebnis der Fourierreihe kaum noch von der exakten Funktion unterscheiden.

Als zweites Beispiel wollen wir die Fourierreihe für die Rechtecksschwingung betrachten. Diese Rechtecksschwingung ist definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

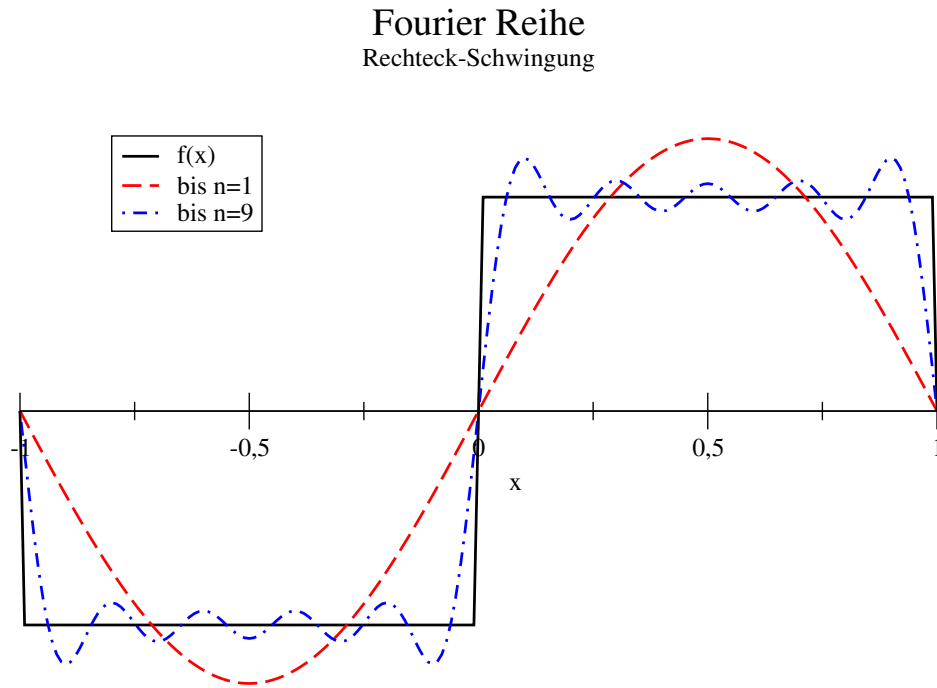


Abbildung 7.4: Rechtecksschwingung und deren Fourier Entwicklung nach (7.17)

und dargestellt in Abb. 7.4. Die Entwicklungskoeffizienten der Fourierreihe berechnen sich in diesem Fall zu

$$\begin{aligned}
 a_0 = a_n &= 0 \\
 b_n &= \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{für } n \text{ ungerade.} \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{7.17}$$

Auch in diesem Fall sind die Ergebnisse der Fourierreihe in Abb. 7.4 dargestellt. Durch die Mitnahme weiterer Terme in der Fourierreihe wird die Annäherung an die Rechteckschwingung weiter verbessert.

Der akustische Schall ist ein typisches Beispiel für eine periodische Schwingung. In diesem Fall ändert sich der Druck als Funktion der Zeit, wie wir im Laufe dieses Kapitels auch noch diskutieren werden. Die Frequenz dieser Schwingung ist charakteristisch für die Höhe des Tones. Liegt eine reine Sinusschwingung vor, so sprechen wir von einem Ton. Ein Klang, hingegen, ist ein streng periodisches Signal, das nicht die Form einer Sinuswelle hat. Die oben diskutierten Rechteck- und Dreieckschwingungen stellen also, wenn wir sie als Funktion der Druckabweichung in Abhängigkeit von der Zeit ansehen, einen solchen Klang dar. In diesem Sinne sind die Töne, die von Musikinstrumenten erzeugt werden als Klänge zu bezeichnen. Nachdem wir gesehen haben, dass wir solche streng periodischen Funktionen durch eine Fourierreihe darstellen können, wissen wir, dass auch ein Klang durch eine Überlagerung von Schwingungen mit Frequenzen $n\omega_0$ dargestellt werden kann. Dabei ist ω_0 die Winkelfrequenz für die periodische Schwingung und $n\omega_0$ mit einer ganzen Zahl n sind die Frequenzen der Obertöne.

7.1.2 Fouriertransformation

Als Ergänzung zur Diskussion der Fourierreihe sollen an dieser Stelle auch einige Bemerkungen zur Fouriertransformation einer beliebigen nicht notwendig periodischen Funktion gemacht werden. Dazu überlegen wir uns, dass man natürlich das Konzept des Vektorraumes von periodischen Funktionen auf einem Intervall $[-L, L]$ erweitern kann auf komplexwertige Funktionen. In diesem Fall müssen wir lediglich die Definition des Skalarproduktes aus (7.11) erweitern für komplexwertige Funktionen zu

$$\langle f|g \rangle := \int_{-L}^L dx f^*(x) g(x), \quad (7.18)$$

wobei die Funktion $f^*(x)$ gerade das komplex konjugierte Ergebnis zu $f(x)$ liefert. Durch diese Definition ist gewährleistet, dass das Skalarprodukt $\langle f|f \rangle$ einer Funktion mit sich selbst einen reellen, positiven Wert ergibt.

Für die periodischen komplexwertigen Funktionen sind die komplexwertigen Exponentialfunktionen eine geeignete Basis und wir können schreiben

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{ik_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n |e_n \rangle, \quad (7.19)$$

mit

$$k_n = \frac{n\pi}{L},$$

wie schon in (7.8). In (7.19) erstreckt sich die Summe aber auch auf negative Werte für n . Die Entwicklungskoeffizienten c_n in (7.8) sind komplexe Zahlen und berechnen sich durch

$$c_n = \langle e_n | f \rangle = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L dx e^{-ik_n x} f(x). \quad (7.20)$$

Wenn wir nun annehmen, dass die Grenzen des Intervalls anwachsen und schließlich gegen $L \rightarrow \infty$ streben, so liegen die diskreten Wellenzahlen k_n mit wachsendem L immer enger zusammen. Aus der Summe über alle Wellenzahlen k_n wird dann ein Integral über kontinuierliche Wellenzahlen. Dies führt zur Fouriertransformation für eine beliebige Funktion $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk c(k) e^{ikx}. \quad (7.21)$$

Die Gewichtsfunktion $c(k)$ in dieser Darstellung der Funktion $f(x)$ heisst auch die Fouriertransformierte Funktion zu $f(x)$ und berechnet sich durch

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}. \quad (7.22)$$

Wir werden auf diese Fouriertransformation einer Funktion später zurückkommen.