

2. Stromfluss durch Leiter; elektrischer Widerstand

2.1 Allgemeines

Wir betrachten ein metallisches Drahtstück, der insgesamt elektrisch neutral ist. Wenn wir jetzt eine Potenzialdifferenz an den Draht anlegen, so beschleunigt das resultierende Feld die Elektronen im Metall. Hierbei können die Elektronen - Im Gegensatz zu den in Abschnitt 1.10 behandelten *zusätzlich* auf ein Metall aufgebrachten Ladungen - im allgemeinen homogen über den Drahtquerschnitt fließen (die elektronische Ladungsdichte wird ja lokal durch die positive Ladungsdichte der Elektronen kompensiert).

Wir definieren als elektrischen **Strom I** die pro Zeiteinheit durch eine Querschnittsfläche A des Drahtes (vgl. Abb. 2-1) fließende Ladung:

$$(2-1) \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

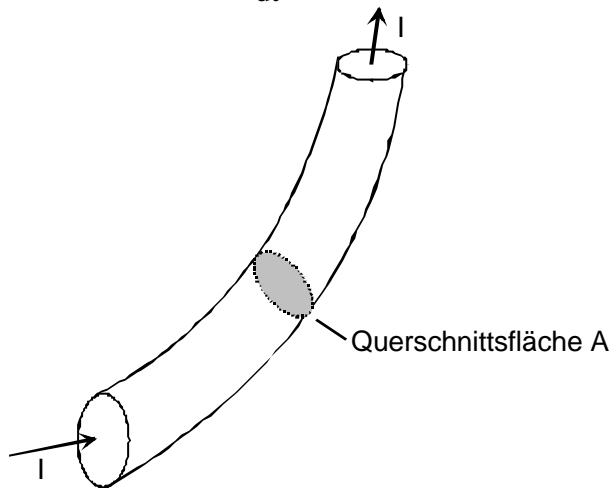


Abb. 2-1: Strom durch ein metallisches Drahtstück

Die **Einheit des Stroms** ist **Ampere**; $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$.

Als **Stromdichte** definieren wir:

$$(2-2) \quad \vec{j} = \frac{I}{A},$$

was wir auch vektoriell als

$$(2-3) \quad \vec{j} = \frac{I}{A} \vec{n}$$

schreiben können. Hierbei ist \vec{n} der Normalenvektor auf der Fläche A.

Wir suchen nun einen Zusammenhang zwischen \vec{j} und der Dichte n der Elektronen.

Nehmen wir an, die Elektronen bewegen sich mit einer mittleren Geschwindigkeit \vec{v}_D ("Driftgeschwindigkeit") entlang des Drahtes. In der Zeit dt "schiebt" sich damit das Volumen $Adx = Avdt$ durch die Querschnittsfläche A (vgl. Abb. 2.2). In diesem Volumen

befinden sich $N = nA$ Elektronen, so dass $dN = nAv_D dt$ Elektronen in der Zeit dt durch A transportiert werden.

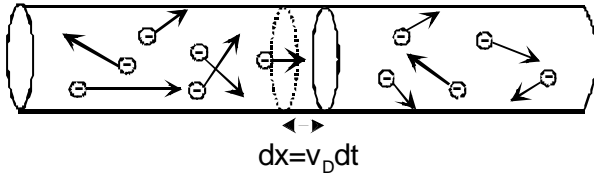


Abb. 2.2: Zum Zusammenhang zwischen Stromdichte, mittlerer Elektronengeschwindigkeit und Elektronendichte

Damit erhalten wir für den Strom:

$$(2-4) \quad I = \frac{dQ}{dt} = \frac{(-e) \cdot dN}{dt} = -eAv_D n .$$

Hierbei ist $(-e)$ die Ladung eines Elektrons. Etwas allgemeiner können wir $(-e)$ durch eine (beliebige) Ladung q pro Teilchen ersetzen:

$$(2-5) \quad I = qAv_D n .$$

Für die **Stromdichte** erhalten wir:

$$(2-6) \quad j = qnv_D$$

bzw. vektoriell:

$$(2-6) \quad \vec{j} = qn\vec{v}_D$$

Man beachte dabei, dass \vec{j} für positive Ladungen ($q > 0$) parallel zum *Teilchenstrom* gerichtet ist, ansonsten antiparallel.

Die treibende Kraft¹ auf die Teilchen ist $\vec{F} = q\vec{E}$ (bzw. $F = -eE$ für $q = -e$ und Bewegung parallel zum Draht). Falls sich die Elektronen ohne Stoß bzw. Energieverlust bewegen könnten, so ergäbe die Newtonsche Bewegungsgleichung (wir nehmen an, das elektrische Feld ist parallel zur x -Richtung):

$$(2-7) \quad m\ddot{x} = qE$$

mit der Lösung:

$$(2-8) \quad v(t) = v(0) + \frac{q}{m} Et .$$

Die Elektronengeschwindigkeit und damit auch die Stromdichte $j = qnv = j_0 + q^2 nEt/m$ wächst in diesem Fall unbeschränkt linear mit der Zeit an. Dies klingt wenig realistisch, ist aber z. B. in einem Supraleiter möglich, solange der Stromdichte unterhalb eines kritischen Wertes j_c

¹ Man kann sich auch andere Kräfte denken, die zu einem Elektronenstrom führen. So führt ein Gradient in der Elektronendichte $n(x)$ zu einem Diffusionsstrom (vgl. Physik I). Wir wollen hierauf aber nicht weiter eingehen.

bleibt. In einem "normalen" Metall geben die Elektronen aber sehr schnell durch einen Stoß ihre Energie ab. Klassisch würde man vermuten, dass die Elektronen vorwiegend an den Ionen des Gitters stoßen. Nach den Gesetzen der Quantenmechanik zeigt sich aber, dass keine solche Stöße stattfinden, wenn die Ionen auf einem perfekten Kristallgitter angeordnet sind.

Stoßprozesse treten aber zwischen den Elektronen und den *schwingenden* Gitterionen auf. Nach den Gesetzen der Quantenmechanik könnten diese Gitterschwingungen als Teilchen, die sog. "Phononen" aufgefasst werden. Stöße können zudem zwischen den Elektronen selbst oder zwischen Elektronen und Verunreinigungen stattfinden.

Als Resultat dieser Stöße erfahren die Elektronen letztlich eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft F_r , die entgegen der Bewegungsrichtung wirkt.

Oft ist F_r proportional zu v . Mit $F_r = -\text{const.} \cdot v$ erhält man:

$$(2-9) \quad m\ddot{x} = qE - \text{const.} \cdot v$$

Nach einer anfänglichen Beschleunigungsphase ist $\ddot{x} = 0$ und

$$(2-10) \quad qE = \text{const.} \cdot v_D$$

bzw.:

$$(2-11) \quad v_D = \frac{q}{\text{const.}} E \equiv \beta E$$

Die Größe β wird auch "**Beweglichkeit**" genannt. Sie hat die Dimension $[m^2/Vs]$.

Wir wollen jetzt genauer betrachten, wie β bzw. die Stromdichte j mit den Stoßprozessen in Zusammenhang stehen.

Die mittlere Flugzeit eines Elektrons zwischen zwei Stößen sei τ . Nach einem Stoß hat das Elektron keine Vorzugsgeschwindigkeit mehr in Richtung des elektrischen Feldes, die Beschleunigung beginnt aufs neue. Die Impulsänderung des Elektrons zwischen zwei Stößen ist:

$$(2-12) \quad \Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t = q\vec{E}\Delta t = q\vec{E}\tau.$$

Hieraus ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit in Richtung des elektrischen Feldes:

$$(2-13) \quad \vec{v}_D = \frac{\Delta\vec{p}}{m} = \frac{q}{m}\tau\vec{E}$$

Mit $\beta = \frac{q}{m}\tau$ folgt hieraus:

$$(2-14) \quad \vec{j} = qn\vec{v}_D = n\frac{q^2}{m}\tau\vec{E} \equiv \sigma\vec{E}$$

mit der **elektrischen Leitfähigkeit**

$$(2-15) \quad \sigma = n\frac{q^2}{m}\tau = q\beta n$$

Man bezeichnet auch das Reziproke der elektrischen Leitfähigkeit als **spezifischen Widerstand**:

$$(2-16) \rho = \sigma^{-1}.$$

Es gilt also:

$$(2-17) \vec{j} = \sigma \vec{E} = \vec{E} / \rho.$$

Wir integrieren \vec{j} über den Leiterquerschnitt und erhalten damit für den Strom durch den Leiter:

$$(2-18) I = \sigma \cdot A \cdot E$$

Die Feldstärke E sei entlang des Leiters konstant und U die Potentialdifferenz auf einem Leiterstück der Länge l (s. Abb. 2.3).

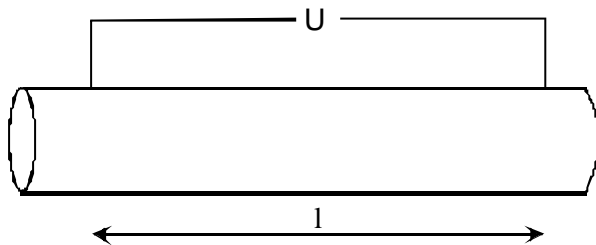


Abb. 2.3: Leiterstück, an dem eine Spannung U anliegt.

Dann gilt: $E = U/l$ bzw.: $I = \frac{\sigma A}{l} U$.

Aufgelöst nach U ergibt sich.

$$(2-19) \quad U = \frac{\rho l}{A} I \equiv RI.$$

Hierbei ist

$$(2-20) \quad R = \rho \frac{l}{A}$$

der **elektrische Widerstand**. Dessen **Einheit** ist **Ohm** (Ω). Das Reziproke des Widerstands wird auch als **Leitwert** G bezeichnet: $G = R^{-1}$. Die **Einheit** des Leitwerts ist **Siemens** (S).

Die Beziehung $U = RI$ (bzw. $\vec{E} = \rho \vec{j}$) ist das **Ohmsche Gesetz**, dementsprechend Strom und Spannung (bzw. Stromdichte und elektrische Feldstärke) proportional zueinander sind.

In Tabelle 2.1 sind spezifische Widerstände einiger Metalle bei 300 K aufgelistet. Typischerweise liegt ρ für reine Metalle im Bereich einiger $\mu\Omega\text{cm}$. Für die Legierung Konstantan liegt ρ bei $50 \mu\Omega\text{cm}$. Wir haben ebenfalls den spezifischen Widerstand von Kohle aufgenommen, wie er in Kohlebogenlampen verwendet wird. er liegt bei ca. $8 \text{ m}\Omega\text{cm}$, also deutlich über dem Wert reiner Metalle.

Tab. 2.1: Spezifische Widerstände einiger Metalle bei 300 K

Metall	ρ [$\mu\Omega\text{cm}$]
Cu	1.7
Au	2.2
Pb	21.0
Fe	9.8
Konstantan (54% Cu 45% Ni 1% Mn)	50
Bogenlampenkohle	8000

Zahlenbeispiele:

Für $\rho = 1 \mu\Omega\text{cm}$ findet man gemäß (2-20) bei einer Querschnittsfläche $A = 1 \text{ mm}^2$ und einer Drahtlänge von 1 m einen Widerstand von $1.7 \cdot 10^{-2} \Omega$. Für die Stoßzeit τ finden wir mit $\rho = m/nq^2\tau$ und $\rho = 1 \mu\Omega\text{cm}$, $n = 10^{23} \text{ cm}^{-3}$, $q = e$ und $m = m_e = 9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ (Masse eines freien Elektrons) einen typischen Wert von ca. $4 \cdot 10^{-14} \text{ s}$. Für die Driftgeschwindigkeit v_D finden wir für eine Stromdichte von 1 A/mm^2 und den obigen Werten für q und n mit $j = qnv_D$ einen Wert von ca. $6 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$, was erstaunlich gering ist².

Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands von Metallen

Kühlt man Metalle ab, so sinkt im allgemeinen deren Widerstand. Für den spezifischen Widerstand gilt: $\rho = \frac{m}{nq^2} \tau^{-1}$. Während die Elektronendichte n weitgehend temperaturunabhängig ist ändert sich dagegen die mittlere Stoßzeit τ bzw. die "Streurrate" τ^{-1} stark mit T . Wir wollen hierbei drei Prozesse berücksichtigen: Streuung zwischen Elektronen und Gitterschwingungen (Phononen), Streuung zwischen Elektronen und Streuung mit Verunreinigungen. Alle Prozesse tragen zur gesamten **Streurrate** τ^{-1} bei, wobei sich die Raten der einzelnen Prozesse addieren:

$$(2-21) \quad \tau^{-1} = \tau_{ep}^{-1} + \tau_{ee}^{-1} + \tau_{ev}^{-1}.$$

Hierbei bezeichnet τ_{ep}^{-1} die Steurrate für **Stöße zwischen Elektronen und Phononen**, τ_{ee}^{-1} die Steurrate bei **Elektron-Elektron-Stößen** und τ_{ev}^{-1} die Steurrate für **Stöße mit Verunreinigungen**.

Bei hohen Temperaturen (genauer: $T > \text{einige K}$) geben die Elektronen ihre Energie überwiegend an die Gitterschwingungen (Phononen) ab (d. h. $\tau^{-1} \approx \tau_{ep}^{-1}$). Deren Zahl ist bei nicht allzu tiefen Temperaturen proportional zu T . Entsprechend wird auch die Steurrate τ_{ep}^{-1} und damit ρ bzw. R proportional zu T . Für tiefe Temperaturen hin "sterben" die Phononen schnell aus, man findet Steuraten, die proportional zu T^3 bis T^5 abnehmen.

Wenn das Material nicht sehr rein ist, ist die Streuung mit Verunreinigungen stark. Diese ist nahezu temperaturunabhängig. Der Widerstand läuft entsprechend zu tiefen Temperaturen hin gegen einen Grenzwert, den "Restwiderstand", der von τ_{ev}^{-1} bestimmt wird. Wie groß der

² Im Vergleich dazu beträgt die Geschwindigkeit der schnellsten Elektronen im Metall ("Fermi-Geschwindigkeit" v_F) ca. 1% der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit.

Restwiderstand ist bzw. unterhalb welcher Temperatur der Widerstand gegen den Restwiderstand läuft ist abhängig vom Material. Bei Legierungen wie Konstantan ist R bereits unterhalb Zimmertemperatur praktisch konstant. Bei sehr reinem Kupfer kann R bis auf weniger als 10^{-5} des 300K-Wertes absinken³ und erst unterhalb einiger K gegen seinen Restwert gehen. Erst bei so reinen Materialien wird bei tiefen Temperaturen der Einfluss der Elektron-Elektron Streuung spürbar. Die Streurrate τ_{ee}^{-1} ist proportional zu T^2 , spielt aber entsprechend dem oben Gesagten für "handelsübliche" Metalle im allgemeinen keine sehr große Rolle.

In Abb. 2.4. sind die Temperaturabhängigkeiten für reine bzw. verunreinigte Metalle schematisch dargestellt. Experimentell beobachten wir die entsprechenden Temperaturabhängigkeiten für Kupfer- bzw. Konstantandraht.

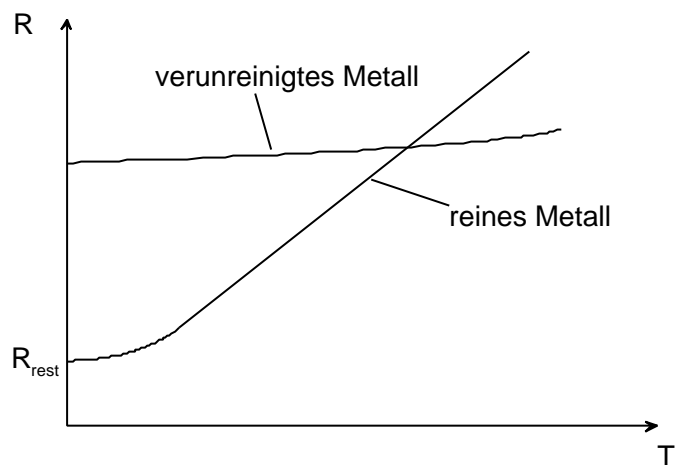
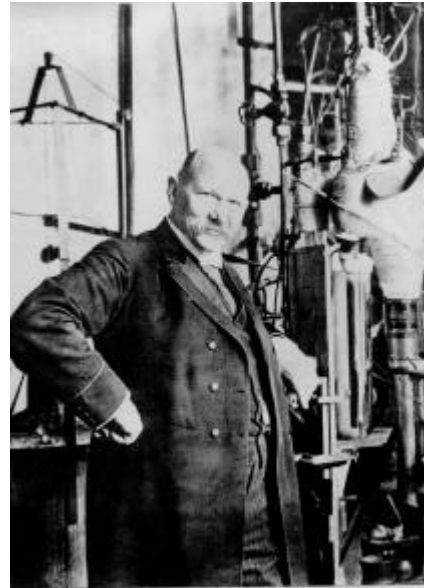
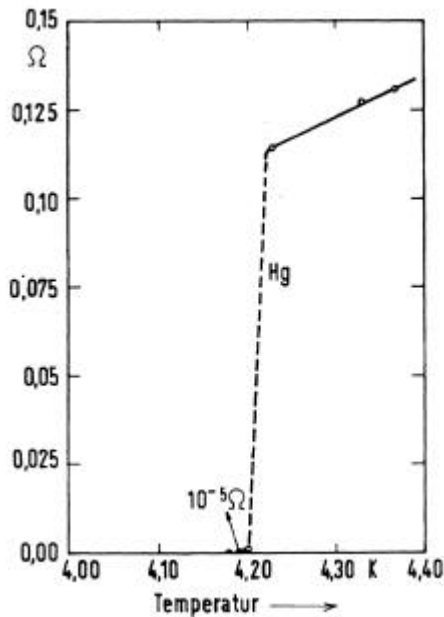


Abb. 2.4: Temperaturabhängigkeit des Widerstands von Metallen. Der spezifische Widerstand eines verunreinigten Metalls ist i. allg. deutlich höher als der eines Reinen Metalls. Der Restwiderstand R_{rest} ist vom Grad der Verunreinigung einer Probe abhängig.

Besonders erwähnenswert sind an dieser Stelle **Supraleiter**, zu denen zahlreiche Elemente des Periodensystems (z. B: Hg, Pb, Nb) und viele Legierungen gehören. Oberhalb einer "kritischen Temperatur" T_c zeigen diese Materialien einen "normalen" ohmschen Widerstand. Bei T_c sinkt R dramatisch und verschwindet kurz unterhalb T_c . Die Supraleitung wurde 1908 an Hg entdeckt ($T_c \approx 4.2\text{K}$, s. Abb. 2.5). Heute kennt man Supraleiter (spezielle Kupferoxidverbindungen), deren kritische Temperatur bei 120 K und darüber liegen kann.

³ Die schnellsten Elektronen können sich dann einige cm stoßfrei bewegen)



"Mercury has passed into a new state, which on account of its extraordinary electrical properties may be called the superconducting state" (H. Kamerlingh Onnes, 1913)

Abb. 2.5: Supraleitung an Hg: Der elektrische Widerstand verschwindet unterhalb von 4.2 K. Linkes Bild: aus W. Buckel/R. Kleiner, Supraleitung; Rechtes Bild: H. Kamerlingh-Onnes, aus: Spektrum der Wissenschaften

Im Leiter dissipierte Leistung

Ein stromdurchflossenes (Normal)metall erhitzt sich, wie wir von der Glühbirne oder der Kochplatte her wissen. Diese Eigenschaft wollen wir im Folgenden quantitativ betrachten. Die Arbeit, um N Ladungen q gegen eine Reibungskraft $F_r=qE$ eine Strecke dx zu transportieren, ist:

$$(2-22) \quad dW = F_r dx = NqEdx$$

Hieraus erhalten wir die aufzuwendende Leistung

$$(2-23) \quad P = \frac{dW}{dt} = F_r \frac{dx}{dt} = Fv = NqEv_D$$

Mit $v_D = j/qn$ ergibt sich:

$$(2-24) \quad P = NqE \frac{j}{qn} = N \frac{Ej}{n} = E \cdot j \cdot V.$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt $n = N/V$ benutzt.

Für die **Leistungsdichte** P/V erhalten wir also:

$$(2-25) \quad \frac{P}{V} = E \cdot j$$

(bzw. vektoriell: $P/V = \vec{E} \cdot \vec{j}$). Diese Leistung wird im Leiter dissipiert.

An einem Leiterstück der Länge l liege die Spannung U an; das elektrische Feld sei homogen im Leiter. Für die **Gesamtleistung** können wir dann weiter schreiben:

$$(2-26) \quad P = \frac{U}{I} \cdot \frac{I}{A} \cdot V = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$

Die beiden letzten Gleichungen gelten, falls das Ohmsche Gesetz erfüllt ist. Die Einheit der Leistung ist Watt (W) und wird wegen $P=UI$ manchmal auch als VA angegeben.

Wenn wir den Strom vorgeben ist mit $P=I^2R$ die dissipierte Leistung umso größer, je größer der Widerstand des Materials ist. Wir demonstrieren dies dadurch, dass wir einen Strom von 55 A durch alternierende, gleich große Drahtstücke aus Cu und Fe schicken (Länge: 3 cm, Querschnittsfläche: 0.07 cm^2). In den Cu-Stücken werden je ca. 120 W dissipiert, in den Eisenstücken über 700 W.

Abschließend sei in diesem Abschnitt angemerkt, dass keineswegs nur Metalle elektrisch leitfähig sind. Daneben existieren im Bereich der Festkörper z. B. "**Halbmetalle**" (z. B. Kohlenstoff) mit einer relativ geringen Konzentration freier Elektronen und "**Halbleiter**", in denen die Konzentration freier Ladungsträger zu tiefen Temperaturen hin exponentiell abnimmt. Auch die schon behandelten **Isolatoren** besitzen eine endliche, wengleich geringe Leitfähigkeit ($\sigma \ll 10^{-3} (\Omega\text{cm})^{-1}$ bei Zimmertemperatur), die zu hohen Temperaturen hin exponentiell anwächst (Wir demonstrieren dies am Beispiel eines Keramikstabs, der im erhitzten Zustand durchaus Strom tragen kann)

2.2 Einfache Schaltungen mit Ohmschen Widerständen; Kirchhoffsche Regeln

Netzwerke aus Widerständen (aber auch anderen Bauelementen) können sehr gut mittels den Kirchhoffschen Regeln analysiert werden, die wir im folgenden herleiten wollen.

Die erste Regel geht von der Ladungserhaltung aus. Ganz allgemein könnten wir ein Volumen V betrachten. Die Ladungserhaltung besagt dann, dass die Summe der aus dem Volumen herausfließenden Ströme ist gleich der zeitlichen Abnahme der Ladung im Volumeninneren ist. Bezogen auf ein kleines Volumenelement dV (z. B. ein Würfel mit Kantenlängen dx , dy , und dz) ergibt sich:

$$(2-27) \quad \text{div } \vec{j} = \dot{\rho}$$

Diese Gleichung war im Theorieteil bereits allgemein hergeleitet worden.

Im *stationären* Fall ist $\dot{\rho}=0$ und damit $\text{div } \vec{j} = 0$. Die Summe der in ein Volumenelement hineinfließenden Ströme muss auch wieder herausfließen. Bezogen auf Drähte, die in einem "Knoten" verbunden sind (vgl. Abb. 2.6), heisst dies, dass die Summe der Ströme, die über die Drähte in den Knoten hineinfließen, über andere Drähte wieder aus diesem Knoten herausfließen müssen:

$$(2-28) \quad \sum_{i=1}^{N_1} I_i^{\text{ein}} = \sum_{i=1}^{N_2} I_i^{\text{aus}}$$

Hierbei sollen N_1 Drähte den Strom in den Knoten hineinführen und N_2 Drähte wieder heraus. Rechnet man die hineinfließenden Ströme positiv, die herausfließenden negativ, so können wir auch schreiben:

$$(2-29) \sum_{i=1}^N I_i = 0$$

Dies ist die **1. Kirchhoffsche Regel ("Knotenregel")**. In (2-28) führen N Drähte ($N=N_1+N_2$) zu dem Knoten. Der i-te Draht führt den Strom I_i .

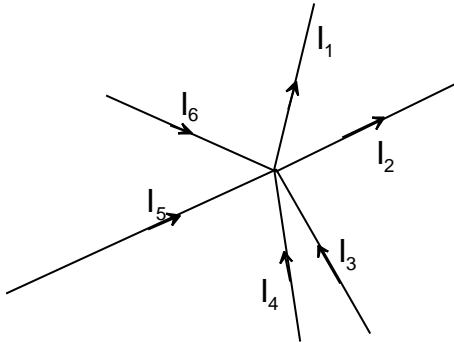


Abb. 2.6: Zur 1. Kirchhoffschen Regel: Knoten, in den N Drähte führen.

Wir betrachten jetzt zwei Knoten, von denen aus Drähte geschlossene Schleifen bilden (Abb. 2.7).



Abb. 2.7: Zur 2. Kirchhoffschen Regel: Schleifen zwischen zwei Knoten.

Wenn wir uns von irgendeinem Punkt aus um die Schleife herumbewegen, müssen wir am Startpunkt wieder das Ausgangspotenzial erreicht haben. Damit muss die Summe über alle Spannungsabfälle gleich Null sein:

$$(2-30) \sum_{i=1}^N U_i = 0$$

Dies ist die **2. Kirchhoffsche Regel ("Maschenregel")**. In (2-30) stellen wir uns vor, dass die Schleife in N Segmente aufgeteilt ist. Über dem i-ten Segment hat der Spannungsabfall den Wert U_i (s. Abb. 2.8). Hierbei müssen wir noch beachten, dass wir die Potenziale in "Bewegungsrichtung" angeben.

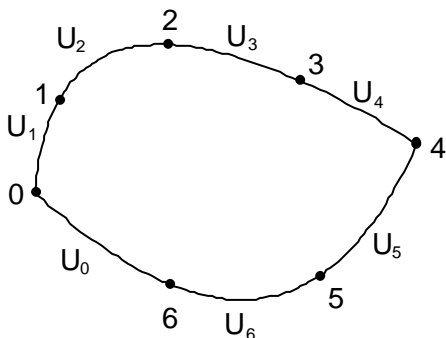


Abb. 2.8: Schleife mit N Segmenten.

Wir wollen jetzt mit Hilfe der Kirchhoffschen Regeln einige spezielle Fälle untersuchen:

a) Ideale Spannungsquelle

Wir unterscheiden im Experiment üblicherweise zwischen vorgegebenen Spannungen (Spannungsquellen) und sich (z. B. an einem Widerstand) einstellenden Spannungen. Im Folgenden wollen wir uns näher ansehen, wie wir hierbei insbesondere die Vorzeichen der Spannungen zu werten haben. Betrachten wir zunächst eine sehr einfache Schleife, die aus einer Spannungsquelle besteht, an die ein Widerstand R angeschlossen ist (Abb. 2.9).

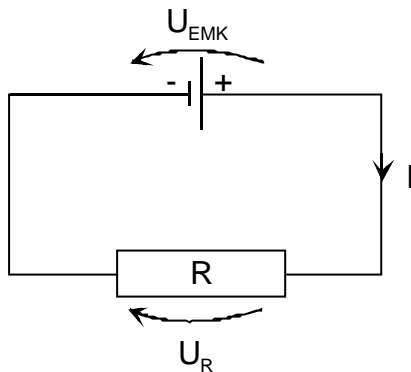


Abb. 2.9: Ideale Spannungsquelle mit angeschlossenem Widerstand. Die Pfeile an den Spannungen zeigen in Richtung abnehmenden Potentials.

Die Spannungsquelle hält die Spannung U_{EMK} aufrecht. Man bezeichnet diese Spannung aus historischen Gründen auch als "**elektromotorische Kraft (EMK)**" oder als "**eingepögte Spannung**". Der "+"-Pol ist dabei positiv. Schließt man den Widerstand R an, so fließt der Strom I von "+" nach "-". Für die Summe der Spannungen U_R (= Spannungsabfall über dem Widerstand) und U_{EMK} gilt: $U_R + U_{EMK} = 0$, wobei wir die beiden Spannungen gemäß Abb. 2.9 im Uhrzeigersinn zählen. Gemäß dem Ohmschen Gesetz ist dann $I = U_R/R = -U_{EMK}/R$. Der Strom fließt im Uhrzeigersinn⁴.

Meist sagen wir, am Widerstand sei die Spannung U angelegt bzw. trete sie Spannung U auf. Konkret meinen wir damit die Spannung U_R , die für den obigen Fall entgegengesetzt gleich der Spannung U_{EMK} ist.

Für den Fall, dass N_1 "Verbraucher" und N_2 Spannungsquellen seriell in die Schleife integriert sind, erhalten wir:

$$(2-31) \quad \sum_{i=1}^{N_1} U_i + \sum_{i=1}^{N_2} U_{EMK,i} = 0.$$

Häufig wird die Maschenregel in dieser Form angegeben.

b) Reale Spannungsquelle

In Spannungsquellen fließt in der Regel bei Stromentnahme ebenfalls ein Strom, der sich oft durch das Ohmsche Gesetz nähern lässt. Die Spannungsquelle erhält dadurch einen endlichen

⁴ Man beachte, dass, wenn wir uns den Stromfluss auch über die Spannungsquelle geschlossen vorstellen, der Strom in der Quelle "bergauf" fließt.

"**Innenwiderstand**" R_i (bei der idealen Spannungsquelle war dieser Null). Hierdurch wird die Spannung am Ausgang der Spannungsquelle (die "**Klemmspannung**" U_K) verschieden von U_{EMK} . Wir können die reale Spannungsquelle oft als eine Reihenanzordnung einer idealen Quelle ohne Innenwiderstand und einen seriell auftretenden Widerstand beschreiben, wie in Abb. 2.10 skizziert

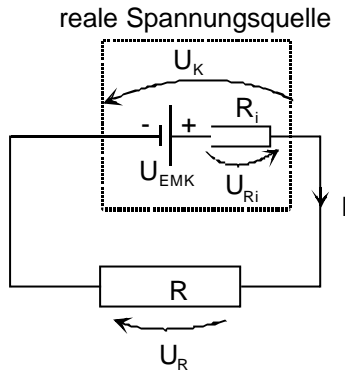


Abb. 2.9: Reale Spannungsquelle mit Innenwiderstand R_i . Die Pfeile an den Spannungen zeigen in Richtung abnehmenden Potentials.

Die Spannung U_{Ri} wirkt U_{EMK} entgegen. An den Klemmen liegt daher die Spannung

$$(2-32) \quad U_K = U_{EMK} - R_i I$$

an, die dem Verbraucher (d. h. dem Widerstand R) zur Verfügung steht. Offensichtlich sollte eine gute **Spannungsquelle** möglichst **niederohmig** sein, also einen kleinen Innenwiderstand besitzen.

c) Reihenschaltung von Widerständen

Es seien zunächst zwei Widerstände wie in Abb. 2.10 in Reihe angeordnet. Wir nehmen an, die Anordnung werde durch eine ideale Spannungsquelle versorgt.

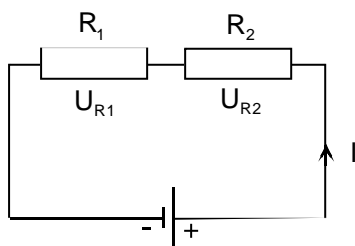


Abb. 2.10: Zwei Widerstände in Reihe

Der gesamte Spannungsabfall $U_{ges} = -U_{EMK}$ über den Widerständen ist dann entsprechend der Knoten- und Maschenregeln:

$$(2-33) \quad U_{ges} = U_{R1} + U_{R2} = R_1 I_1 + R_2 I_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I$$

Hieraus folgt:

$$(2-34) \quad I = \frac{U_{ges}}{R_1 + R_2}$$

Die beiden Widerstände in Serie verhalten sich wie ein Widerstand mit $R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$; die **Widerstände** sind also zu **addieren**. Analog finden wir für N Widerstände in Serie:

$$(2-35) \quad R_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N R_i .$$

Man beachte weiter, dass sich Serienschaltungen von zwei (oder auch mehr) Widerständen als **Spannungsteiler** verhalten. Es gilt:

$$(2-36) \quad \frac{U_{R1}}{U_{R2}} = \frac{R_1 I}{R_2 I} = \frac{R_1}{R_2}$$

und weiter:

$$(2-37) \quad \frac{U_1}{U_{\text{ges}}} = \frac{U_1}{U_1 + U_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R_{\text{ges}}} .$$

Die Spannung U_1 ist also nur ein Bruchteil R_1/R_{ges} der Gesamtspannung.

Im Experiment prüfen wir Spannungen, Ströme und Widerstände für eine Reihenschaltung von zwei 100 W und einem 200 W Widerstand.

d) Parallelschaltung von Widerständen

Wir betrachten die in Abb. 2.11 dargestellte Parallelschaltung von zwei Widerständen.

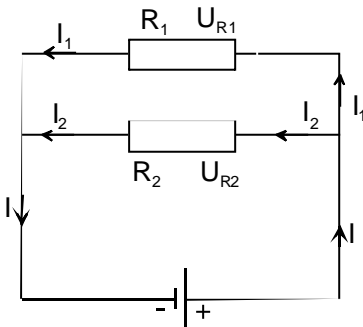


Abb. 2.11: Parallelschaltung von zwei Widerständen

Entsprechend der Maschenregel ist $U_{\text{ges}} = U_1 = U_2$. Die Knotenregel besagt:

$$(2-38) \quad I = I_1 + I_2 = \frac{U_{R1}}{R_1} + \frac{U_{R2}}{R_2} = U_{\text{ges}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{U_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}} .$$

Die parallelen Widerstände verhalten sich also wie ein Widerstand mit

$$(2-39) \quad \frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} .$$

Wir müssen also die **reziproken Widerstände** (d. h. die **Leitwerte**) **addieren**. Für N parallelgeschaltete Widerstände gilt entsprechend:

$$(2-40) \quad \frac{1}{R_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}.$$

Eine Anordnung von zwei (oder mehr) parallelen Widerständen kann als **Stromteiler** verwendet werden. Es gilt:

$$(2-41) \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{U_{\text{ges}}/R_1}{U_{\text{ges}}/R_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

bzw.:

$$(2-42) \quad \frac{I_1}{I} = \frac{U_{\text{ges}}/R_1}{U_{\text{ges}}/R_{\text{ges}}} = \frac{R_{\text{ges}}}{R_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Der Strom I teilt sich also im umgekehrten Verhältnis wie die Widerstände auf; der Gesamtstrom wird entsprechend (2-42) geteilt.

e) Stromquellen

Eine Spannungsquelle sollte eine Spannung U unabhängig von der "Last" (d. h. den angeschlossenen Widerständen) anbieten. Sie hat daher wie oben besprochen idealerweise den Innenwiderstand Null. Dagegen sollte eine Stromquelle einen festen Stromwert unabhängig von der Last anbieten. Man kann dies dadurch erreichen, dass man eine Spannungsquelle mit einem sehr hohen Vorwiderstand versieht (s. Abb. 2.12).

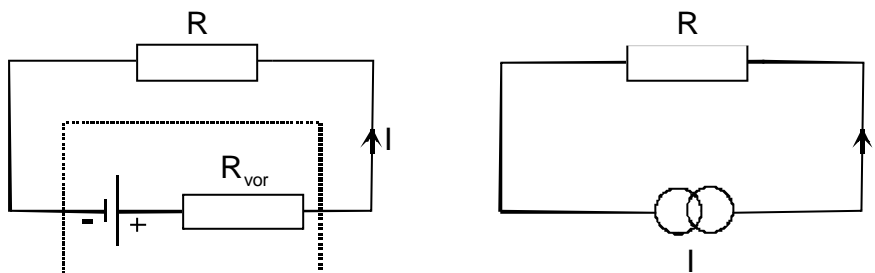


Abb. 2.12: Realisierung einer Stromquelle

Es gilt dann $I = \frac{-U_{\text{EMK}}}{R_{\text{vor}} + R} \approx \frac{-U_{\text{EMK}}}{R_{\text{vor}}}$. Hierbei sollte R_{vor} so groß wie möglich (insbesondere

$R_{\text{vor}} \gg R$) sein. **Stromquellen** sind also **hochohmig**. Man realisiert Stromquellen oft durch spezielle Halbleiterschaltungen. Diese Quellen haben Innenwiderstände von 100 M Ω bis einige G Ω .

f) Amperemeter

Strommessgeräte⁵ nutzen oft die Kraftwirkung von Strömen aus, die wir in Abschnitt 3 genauer behandeln werden. Hier wollen wir nur darauf eingehen, dass **Amperemeter niederohmig** sein sollten. Sie werden wie in Abb. 2.13 dargestellt direkt in den Stromkreis integriert und sollten den Stromfluss nicht verringern, also selbst einen vernachlässigbar kleinen Widerstand besitzen.

g) Voltmeter

Als Voltmeter lassen sich beispielsweise Amperemeter benutzen. Hierbei wird mittels eines Stromteilers (vgl. Abschnitt d) ein kleiner Anteil des Stroms abgezweigt und dann gemessen. **Voltmeter** sollten möglichst **hochohmig** sein, so dass sich der Stromfluss im eigentlichen Kreis nicht ändert. Gute Voltmeter basieren auf Halbleiterschaltungen, die ihrerseits die zu messende Spannung aufteilen und einen geeigneten Ausgang (z. B. digitales Anzeigedisplay) ansteuern.

h) Leistungsmesser

Leistungsmesser machen sich beispielsweise die Erwärmung eines stromdurchflossenen Drahtes zunutze (gemäß $P = UI$ wird im Draht Leistung dissipiert; diese Leistung ist proportional zur Temperaturerhöhung ΔT des Drahtes). Man kann ΔT direkt messen oder indirekte Eigenschaften wie die Längenausdehnung des Drahtes bei Erwärmung ausnutzen.

i) Widerstandsmessung: Vierpunktmethode

Oft muss der Widerstand von Proben gemessen werden, die einerseits sehr niederohmig sind und an die andererseits nur schlecht Drähte angebracht werden können. Speziell sind die Kontaktstellen oft hochohmig und ändern sich evtl. sogar als Funktion der Zeit (oder anderen Größen wie der Temperatur etc). Man benötigt daher eine Methode, die diese Widerstände nicht mitmisst.

Die prinzipielle Anordnung ist in Abb. 2.13 skizziert. Man bringt an der Probe vier Kontakte an. Die äußeren dienen der Stromzufuhr, die Inneren dienen der Spannungsmessung. Es wird dabei nur der Spannungsabfall zwischen den inneren Kontakten bestimmt.

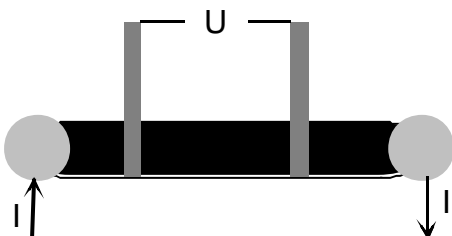


Abb. 2.13: Widerstandsbestimmung nach der Vierpunktmethode

Die Abb. 2.14 zeigt ein Ersatzschaltbild der Anordnung. Die Probe wird mittels einer Stromquelle mit einem konstanten Strom versorgt. Neben dem Probenwiderstand existieren

⁵ Dies gilt für Messung von Gleichströmen (d. h. zeitunabhängigen Strömen). Auf die Messung von Wechselströmen werden wir gesondert eingehen.

im Stromkreis eine Reihe parasitärer Widerstände: die Kontaktwiderstände R_k , sowie der Widerstand der Zuleitungen. An all diesen Widerständen fallen Spannungen ab. Die Spannungsmessung erfolgt über den oberen Kreis. Auch in diesem Kreis befinden sich die parasitären Widerstände der Kontaktierung bzw. der Zuleitungen. Das Voltmeter selbst ist aber sehr hochohmig (s. Abschnitt g), so dass in diesem Kreis praktisch kein Strom fließt. Somit treten an den parasitären Widerständen auch keine Spannungsabfälle auf, das Voltmeter misst nur den Spannungsabfall über R_{probe} . Durch die Anordnung sich also R_{probe} unabhängig von den parasitären Widerständen bestimmen.

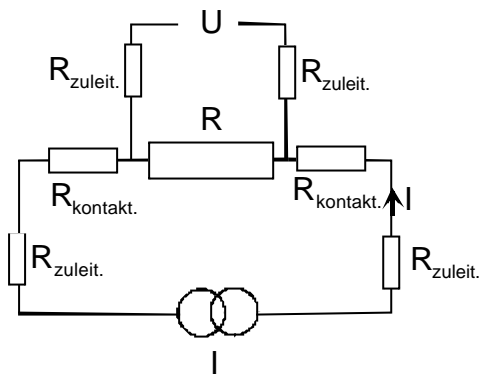


Abb. 2.14: Widerstandsbestimmung nach der Vierpunktmethode: Ersatzschaltbild

j) Widerstandsmessung: Wheatstone-Brückenschaltung

Die Wheatstone-Brückenschaltung ist in Abb. 2.15 dargestellt.

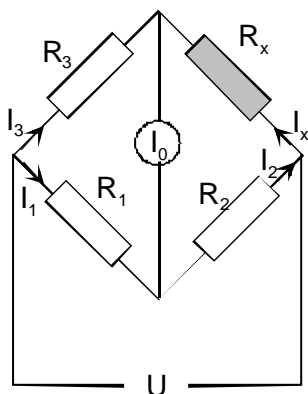


Abb. 2.15: Wheatstone'sche Brückenschaltung

Ziel ist die Bestimmung des Widerstands R_x bei bekannten Widerständen R_1 , R_2 , R_3 . Das Verhältnis der Widerstände R_1 und R_2 wird dabei so eingestellt, dass durch das Amperemeter kein Strom fließt. Dadurch ist die Widerstandsbestimmung auf eine "Null-Strom-Messung" zurückgeführt. Man kann ein sehr empfindliches Amperemeter einsetzen und damit R_x extrem genau bestimmen.

Im einzelnen gilt in der Schaltung für den Fall, dass der Strom I_0 durch das Amperemeter gerade Null ist (Anwendung Maschen- und Knotenregel):

$$(2-43a) \quad I_3 = I_x \quad (\text{Knotenregel})$$

$$(2-43b) \quad I_1 = I_2 \quad (\text{Knotenregel})$$

$$(2-44a) \quad I_3 R_3 = I_1 R_1 \quad (\text{Maschenregel, linkes Dreieck})$$

$$(2-44b) \quad I_x R_x = I_2 R_2 \quad (\text{Maschenregel, rechtes Dreieck})$$

Hieraus folgt:

$$(2-45) \quad \frac{R_x}{R_3} = \frac{R_2}{R_1}$$

bzw.:

$$(2-46) \quad R_x = R_3 \cdot \frac{R_2}{R_1}$$

Real gibt man R_3 als festen Widerstand vor und legt R_1 und R_2 als einen Schiebewiderstand aus wie in Abb. 2.16 skizziert. Teilt man die Länge des Schiebewiderstands im Verhältnis l_1/l_2 , so verhalten sich die Teilwiderstände R_1 und R_2 wie dieses Verhältnis und man erhält:

$$(2-47) \quad R_x = R_3 \cdot \frac{l_2}{l_1}$$

Man verschiebt bei der Messung die Kontaktierung am Schiebewiderstand und gleicht dadurch die Brücke ab, bis $I_0 = 0$ wird. Entsprechend (2-47) hat man R_x bestimmt (Wir zeigen das entsprechende Experiment für $R_x = 220 \Omega$ und $R_2 = 100 \Omega$).

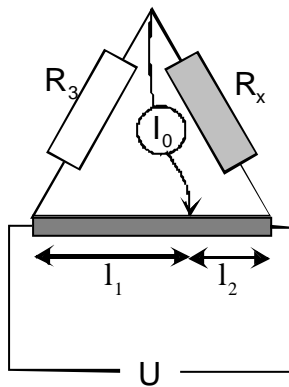


Abb. 2.16: Wheatsonesche Brückenschaltung: Realisierung mittels Schiebewiderstand

2.3. Spannungsquellen

In diesem Abschnitt wollen wir näher besprechen, welche Arten von Spannungsquellen real verwendet werden können.

Kondensatoren

Eine erste, naheliegende Variante ist die Verwendung eines geladenen Kondensators. Allerdings muss hier darauf hingewiesen werden, dass ein Kondensator keine "richtige" Spannungsquelle darstellt. Wegen $Q = CU$ fällt die Spannung im Verlauf der Zeit, wenn sich der Kondensator entlädt.

Wir demonstrieren den Entladevorgang (sowie die Parallel- und Reihenschaltung von Kondensatoren) dadurch, dass wir Kondensatoren mit einer Glühlampe verbinden. Die Lampe glüht anfangs stark und geht dann langsam aus.

Wir können den Zeitverlauf von U , Q und I mittels der uns bereits bekannten Beziehungen leicht analysieren.

Betrachten wir zunächst Abb. 2.17.

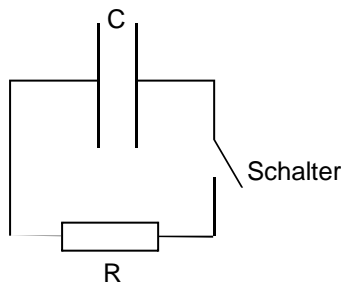


Abb. 2.17: Entladen eines Kondensators

Der Stromkreis besteht aus einem Kondensator (Kapazität C), einem Verbraucher (Widerstand R) und einem Schalter. Bei offenem Schalter fließt kein Strom im Stromkreis. Die EMK des Kondensators (Spannung U_c) wird durch einen entgegengesetzt gleichen Spannungsabfall über dem Schalter kompensiert. Schließen wir den Schalter, so fließt ein Strom I , der sich im Verlauf der Zeit ändert. Wir erhalten jetzt einen Spannungsabfall U_R am Widerstand. Es gilt:

$$(2-48) \quad U_c + U_R = 0$$

Hieraus folgt mit $U_c = Q/C$ und $U_R = RI$:

$$(2-49) \quad \frac{Q}{C} + RI = 0.$$

Wir differenzieren nach der Zeit und erhalten mit $\dot{Q} = I$:

$$(2-50) \quad I + RC\dot{I} = 0$$

Diese Differenzialgleichung wird gelöst durch:

$$(2-51) \quad I(t) = I(0)e^{-t/RC}.$$

Der Strom fällt also exponentiell von einem Anfangswert $I(0)$ aus ab, mit einer charakteristischen Zeitkonstanten RC . Für⁶ $C = 1 \text{ F}$ und $R = 1\text{k}\Omega$ beträgt dann RC immerhin 1000 s. Den Anfangstrom können wir dabei (Kirchoffsche Gesetze benutzen!) durch $I(0) = U_c(0)/R$ ausdrücken.

Die Ladung des Kondensators können wir aus (2-51) via $\dot{Q} = I$ durch Integration bestimmen. Wir erhalten:

$$(2-52) \quad Q(t) = Q(0) \cdot e^{-t/RC}.$$

Hierbei ist $Q(0) = CU(0)$. Schließlich erhalten wir mittels $U = Q/C$ den zeitlichen Spannungsverlauf am Kondensator:

$$(2-53) \quad U_c(t) = U_c(0) \cdot e^{-t/RC}.$$

Völlig analog zu (2-48) bis (2-50) können wir auch das Aufladen eines Kondensators berechnen, wenn wir an den ungeladenen Kondensator schlagartig eine Spannung U_0 anlegen. Wir erhalten:

$$(2-54) \quad I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC}$$

$$(2-55) \quad Q(t) = CU_0 \cdot (e^{-t/RC} - 1)$$

$$(2-56) \quad U_c(t) = U_0 \cdot (e^{-t/RC} - 1)$$

Herbei nehmen wir an, dass der Ohmsche Widerstand des Ladekreises gerade R ist.

Wir demonstrieren den Entlade- bzw. Aufladevorgang eines Kondensators dadurch, dass wir eine Rechteckspannung U an den Kondensator anlegen. Der Kondensator folgt jeweils verzögert (s. Abb. 2.18; aufgetragen sind der Strom auf den Kondensator sowie die angelegte Rechteckspannung). Wenn wir dagegen den Kondensator durch einen Widerstand ersetzen, finden wir, dass der Strom der Rechteckspannung ohne Verzögerung folgt.

⁶ Man verwendet $C = 1 \text{ F}$ z. B. an Fahrrädern; die Kondensatoren werden während des Fahrens aufgeladen.

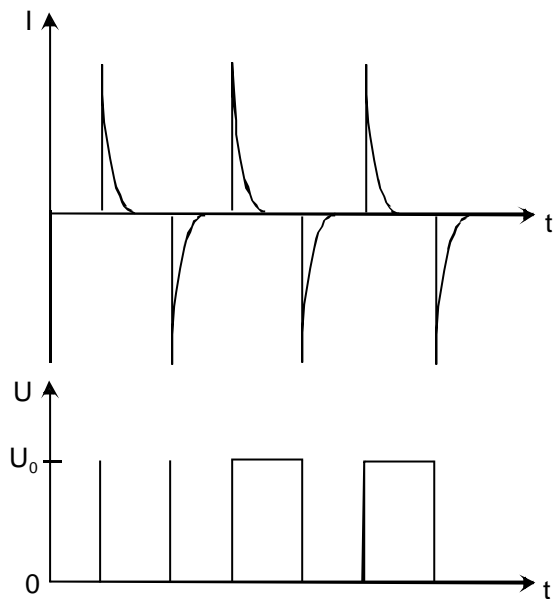


Abb. 2.18: Reaktion eines Kondensators auf eine Rechteckspannung. Oben: Strom auf den Kondensator; unten: angelegte Rechteckspannung. Beim Entladen bzw. Beladen des Kondensators fließt der Strom in entgegengesetzte Richtung.

Galvanische Elemente

Eine bessere Form von Spannungsquellen sind Galvanische Elemente.

Hierbei tauchen zwei Metalle in einen "Elektrolyten", d. h. eine Flüssigkeit, in der Ionen gelöst sind.

Wir beobachten zunächst den zeitlichen Spannungsverlauf zwischen einer Zinkelektrode und einer Kupferelektrode, die beide in eine verdünnte H_2SO_4 -Säure tauchen. Vor dem Eintauchen ist $U = 0$. Nach dem Eintauchen baut sich eine Spannung auf (Cu-Elektrode: positiv), die etwas über 1 V sättigt.

Wenn ein Metall (z. B. Zn) in den Elektrolyten taucht, so gehen einige Metallionen (Zn^{2+}) in Lösung. Die Zn-Elektrode wird dabei selbst negativ geladen. Um die Elektrode bildet sich eine positiv geladene Zone aus Zn^{2+} -Ionen. Nach einer gewissen Zeit können keine weiteren Ionen mehr gegen diese positive Raumladung austreten, die Aufladung der Zn-Elektrode geht gegen einen Sättigungswert.

Dieser Sättigungswert ist abhängig vom Elektrodenmaterial, sowie von der Ionenkonzentration im Elektrolyten. Man kann nun die Aufladung eines gegebenen Elektrodenmaterials als eine '**Spannungsreihe**' angeben. Man bezieht dabei die Spannung auf das Potenzial einer Referenzelektrode, und zwar einer '**Wasserstoff-Elektrode**'. Hierbei handelt es sich um eine Platinelektrode, die von Wasserstoff umspült ist. Wir werden diesen Elektrodentyp etwas später noch kennenlernen. Als Ionenkonzentration im Elektrolyten wählt man eine Lösung mit 1 mol Ionen pro Liter. Tab. 2.2 gibt die Spannungsreihe für einige Elemente an.

Tab. 2.2: Spannungsreihe für einige Elemente

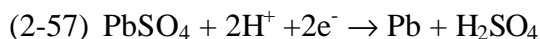
Element	Spannung [V]
Li	-3.02
Zn	-0.762
Pb	-0.126
Cu	+0.345
Au	+1.5

Für das Potenzial der Zn- Elektrode gegen die Cu-Elektrode erhält man für diese spezielle Ionenkonzentration: $U = [0.345 - (-0.762)]V \approx 1.1 V$.

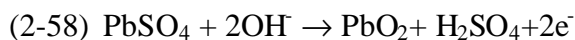
Entnimmt man einem galvanischen Element Strom, so fließt im Elektrolyten ein Gegenstrom von Ionen zwischen den Elektroden. Als Konsequenz schlagen sich positiv geladene Metallionen am "+"-Pol (der Anode) nieder. Wenn diese Metallionen ein anderes Element sind als das Material der Kathode, so ändert sich deren Zusammensetzung und damit auch die Spannung zwischen den Elektroden. Man spricht von einem "nicht-konstanten" galvanischen Element. Dagegen ändert sich die Zusammensetzung der Elektrodenoberfläche bei einem konstanten galvanischen Element nicht.

Ein Beispiel ist das **'Daniell-Element'**: Man taucht eine Zn-Elektrode und eine Cu-Elektrode in ein CuSO_4 -Bad. Zwischen den beiden Elektroden befindet sich eine poröse Tonwand, die für Zn^{2+} -Ionen undurchlässig ist. An der Cu-Elektrode schlagen sich Cu^{2+} -Ionen nieder. Diese Elektrode wird damit im Verlauf der Zeit dicker, behält aber ihre Zusammensetzung. Von der Zn-Elektrode (der Kathode) lösen sich Zn^{2+} -Ionen, so dass diese im Verlauf der Zeit dünner wird. Zu dieser Elektrode wandern auch SO_4^{2-} -Ionen die sich dort aber nicht stabil anlagern.

Im wiederaufladbaren **Pb-Akkumulator** tauchen zwei zunächst gleiche Pb-Elektroden in H_2SO_4 und überziehen sich schnell mit einer PbSO_4 -Schicht. Man legt jetzt eine Spannung an die Elektroden an. An der Anode wandelt sich das PbSO_4 in Pb zurück:



An der Kathode verwandelt sich PbSO_4 in PbO_2 :



Man erhält jetzt ein galvanisches Element zwischen Pb und PbO_2 ("Sekundärelement"). Das Element liefert eine Spannung von 2.02 V unter Normalbedingungen (PbO_2 : positiv)

Beim Entladen laufen die Reaktionen (2-57) und (2-58) gerade umgekehrt ab, bis man auf beiden Seiten Pb-Elektroden mit einem PbSO_4 -Überzug zurückerhält.

Wir demonstrieren den Ionentransport in Elektrolyten anhand einiger Experimente:

- **Kupferabscheidung**: Man taucht zwei Ni-Elektroden in eine CuSO_4 -Lösung und legt an die Elektroden eine Spannung an. Die Cu^{2+} -Ionen wandern zur Kathode, neutralisieren sich und bilden einen roten Überzug auf der Elektrode.

- **Ionenleitung in Salzlösungen:** Zwei Elektroden tauchen zunächst in destilliertes Wasser. An die Elektroden ist eine Spannungsquelle angeschlossen. Zunächst fließt kein nachweisbarer Strom. Löst man NaCl im Wasser, steigt dagegen der Strom stark an.

- **Innenwiderstand von Batterien:** Gemäß (2-32): $U_K = U_{EMK} - R_i I$ erniedrigt sich die Spannung an einer Batterie bei Stromfluss. Bei offenem Stromkreis messen wir an den Klemmen U_{EMK} . Wir verbinden die Pole der Batterie mit einem Schiebewiderstand und stellen ihn so ein, dass $I = 1 \text{ A}$ fließt. Die Klemmspannung erniedrigt sich. Wir können jetzt R_i bestimmen via:

$$(2-59) \quad R_i = \frac{U_{EMK} - U_K}{I}$$

Für die Batterie ergibt sich ein Wert von ca. $0.5 \text{ } \Omega$, für einen Pb-Akkumulator, den wir ebenfalls messen, ein Wert von ca. $0.2 \text{ } \Omega$.

- **Strom-Spannungs-Charakteristik von elektrolytischen Zellen:** In der Anordnung tauchen zwei Pt-Elektroden in H_2SO_4 . Wir legen eine Spannung U an die Elektroden und messen den Stromfluss. Hierbei finden wir, dass bis $U = U_z \approx 1.2 \text{ V}$ ("Zersetzungsspannung") zunächst ein geringer Strom fließt, der nach kurzer Zeit praktisch auf Null zurückgeht. Erst für höhere Spannungen wächst I ungefähr linear an, d. h. wir erhalten

$$(2-60) \quad I \approx \frac{U - U_z}{R}$$

Diese $U(I)$ -Charakteristik ist in Abb. 2.19 schematisch dargestellt.

Bei kleinen Spannungen scheidet sich einer Pt-Elektrode Wasserstoff ab (= "**Wasserstoffelektrode**"), an der anderen Sauerstoff. Man hat dadurch ein galvanisches Element zwischen H_2 und O_2 erzeugt, das mit U_z der äußeren Spannung entgegenwirkt. Erst bei Spannungen $U > U_z$ fließt ein nennenswerter Strom. Der Effekt wird auch "Galvanische Polarisation" genannt.

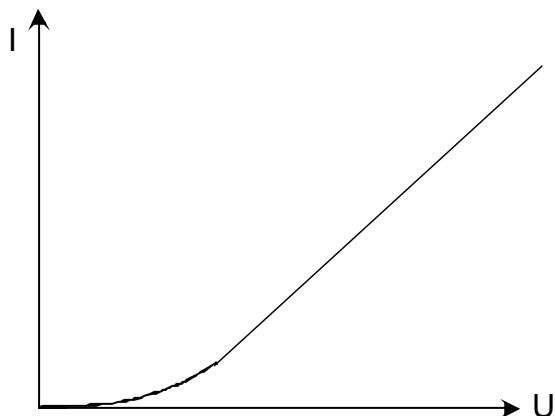


Abb. 2.19: Strom Spannungs-Charakteristik von zwei in H_2SO_4 tauchenden Pt-Elektroden.

2.4. Moderne Messverfahren zur Bestimmung von Ampere, Volt und Ohm

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir kurz die Verfahren erwähnen, durch die heute die Einheiten Ampere, Volt und Ohm bestimmt werden. In allen Fällen werden Quanteneffekte verwendet.

Strom ist definiert als Ladung pro Zeiteinheit. Man kann mikroelektronische Schaltungen realisieren, in denen einzelne Elektronen in regelmäßigem zeitlichen Abstand durch die Schaltung treten (**Single Elektron Tunneling**). Für den Strom können wir dann schreiben:

$$(2-61) I = -ef$$

Hierbei ist f die Frequenz, mit der die Elektronen durch die Schaltung "tropfen". Sie kann sehr leicht bestimmt werden. Man hat dann bei Kenntnis von e die Strommessung auf eine Frequenzmessung zurückgeführt.

Analog lässt sich die **Spannungsmessung** auf eine Frequenzmessung zurückführen. Der benutzte Effekt ist der "**Josephsoneffekt**", der in Supraleitern auftritt und mit der Interferenz kohärenter Materiewellen (aufgebaut aus Paaren von Elektronen) zu tun hat. Es ergibt sich die Beziehung:

$$(2-62) U = \frac{h}{2e} f ,$$

wobei h das Plancksche Wirkungsquantum und e die Elementarladung ist. Man verwendet Schaltungen aus sehr vielen Josephsonkontakten, um "Spannungsstandards" zu realisieren. Hierbei werden Mikrowellen bei Frequenzen f von einigen 10 GHz eingestrahlt und die Spannung U bestimmt. Die Größe $2e/h$ wird auch als Josephsonkonstante bezeichnet. Sie wurde 1990 auf den Wert $K_{J90} = 483.5979 \text{ GHz/mV}$ festgelegt. Damit hat man eine exakte Beziehung, die die Frequenz f und die Spannung U verknüpft.

Das Ohm schließlich kann durch den **Quanten-Hall-Effekt** auf Naturkonstanten zurückgeführt werden. Dieser Effekt tritt in Halbleitern auf und hat mit der Quantisierung von Elektronenbahnen im Magnetfeld zu tun. Hierbei tritt ein Widerstand in Einheiten R_q/n (: ganze Zahl) auf. R_q hat den Wert

$$(2-63) R_q = \frac{h}{e^2}$$

(Zahlenwert: $25813 \text{ } \Omega$, wird nach dem Entdecker des Quanten-Hall-Effekts (Klaus von Klitzing) manchmal auch als "1 Klitzing" bezeichnet).